Analyse semi-classique des opérateurs périodiques perturbés

Youssef Sbai

THÈSE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Ecole Doctorale De Mathématiques Et Informatique

Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006

DOMAINE DE RECHERCHE : Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique

Présentée par

Youssef SBAI

Analyse semi-classique des opérateurs périodiques perturbés

Soutenue le 10 Décembre 2015

Devant la commission d'examen

JURY

M. Mouez DIMASSI	Professeur à l'Université de Bordeaux	Directeur de thèse
M. Philippe BRIET	Professeur à l'Université de Toulon	Rapporteur
M. Setsuro FUJIIÉ	Professeur à l'Université de Ritsumeikan (Japon)	Rapporteur
M. Maher ZERZERI	Maître de conférence à l'Université de Paris 13	Examinateur
M. Vesselin PETKOV	Professeur à l'Université de Bordeaux	Examinateur
M. Alain BACHELOT	Professeur à l'Université de Bordeaux	Président

Thèse préparée au sein du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Bordeaux
(I.M.B),
dans l'école doctorale de mathématiques et informatique.

Dédicaces

À mes parents qui ont toujours souhaité ma réussite.

À mes meilleurs amis : Marouane Assal et Diomba Sambou.

À mes frères et soeurs.

À mon frère Chaker.
À toute ma famille.

Remerciements

La liste des personnes que je souhaite remercier est longue, et réussir à exprimer toute ma gratitude envers ces personnes avec les mots justes me semble aujourd'hui bien plus délicat que de rédiger une thèse.

Bien évidemment, c'est à mon directeur de thèse **Mouez Dimassi** que vont mes premiers remerciements. Il a été pour moi, tout au long de ma thèse, un mentor remarquable. Il m'a montré comment construire mon intuition mathématique, comment prendre du recul, comment rédiger de manière lisible... Mais au-delà de ses indéniables qualités mathématiques, c'est par ses qualités humaines qu'il a su rendre ces années agréables et enrichissantes. Il a toujours été très attentif à ce que je ressentais, et pas seulement aux mathématiques qui nous liaient formellement. Il m'est parfois arrivé au cours de ma thèse d'être démotivé mais, invariablement, en sortant de son bureau, j'étais de nouveau confiant et prêt à attaquer avec le sourire des questions passionnantes. Je lui suis aussi reconnaissant d'avoir su rester très disponible jusqu'à la fin de ma thèse, malgré une vie professionnelle chargée.

Je remercie vivement Monsieur **Alain Bachelot** pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury. Mes remerciements s'adressent également à Messieurs **Vesselin Petkov** et **Maher Zerzeri**, d'avoir bien voulu me faire l'honneur d'accepter d'être membres du jury de ma thèse.

Je suis très reconnaissant envers Monsieur **Philippe Briet** et Monsieur **Setsuro Fujiié** d'avoir accepté de rapporter sur ma thèse et je les remercie de l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux ainsi que leurs commentaires.

Durant cette thèse, j'ai eu la chance de participer à plusieurs conférences nationales et internationales. Ces rencontres mathématiques ont constitué pour moi une occasion remarquable d'échanger des idées. Je tiens donc à remercier leurs organisateurs et leurs participants pour les nombreuses discussions que nous avons partagées.

Merci à tous les membres de l'Institut de Mathématiques de Bordeaux et plus particulièrement aux membres du groupe EDP et Physique-Mathématiques qui a été ma maison mathématique pendant ces années de thèse. J'en profite pour adresser un salut amical aux thésards passés et actuels de l'IMB : **Francesco, Benjamin, Mohamed, Mahdi, Stefano, Marie, Alice, Rida, Clément, Fanilo,**.... vraiment la liste est longue mais je suis désolé pour les noms oubliés, je garderai un souvenir impérissable de nos discussions et de vos encouragements.

Je souhaite remercier **Alberto Farina** pour son bon encadrement lors de mon stage de master 2 à l'Université Jules Verne d'Amiens. Merci Alberto de m'avoir supporté et m'avoir conseillé durant cette période délicate.

Un remerciement spécial à tous mes enseignants durant ce long parcours pour leur bonne qualité d'enseignement et d'encadrement. Mes chers enseignant, je vous suis reconnaissant. Merci pour tout ce que vous m'avez apporté durant ces années.

Je tiens à mentionner le plaisir que j'ai eu à connaître les formidables frères **Marouane Assal** et **Diomba Sambou** avec qui j'ai partagé beaucoup de moments sympathiques dont je garde beaucoup de souvenirs. Ils ont toujours été très proches pour m'encourager et me soutenir.

J'ai une dette particulière envers mes amis d'Amiens où j'ai fait mon master II de recherche, surtout **Abaidi Mohamed** et **Moussa Mory** pour leurs encouragements. Je remercie également les amis Tunisiens de Bordeaux, **Mohamed Ali, Kamel, Sami, Mahdi, Bachir, Houssem, Maher, Seyf** et **Helmi** pour les bons moments passés ensemble.

Merci à tous mes amis, **Ahmed Rjaiba, Ahmed Arfaoui, Mohamed Drissi, Ramzi Hamemi, Ala Khalfa, Hamza Hedfi, Melek Mrad, Rached Licheheb, Taha Benhamida** et tant d'autres.

Mes remerciements vont enfin à ma famille, en particulier à mes parents et mes frères et soeurs, et à mes proches qui m'ont toujours soutenu dans mon travail. Leurs encouragements et leur réconfort dans les moments difficiles m'ont été indispensables pour persévérer et achever mon travail.

Résumé

Cette thèse traite de certaines propriétés spectrales de deux classes spécifiques des opérateurs périodiques perturbés. Nous nous intéressons tout d'abord à un opérateur différentiel elliptique à coefficients périodiques P perturbé par un opérateur différentiel dépendant d'un petit paramètre semi-classique $Q(h), h \searrow 0$. On obtient un développement asymptotique en puissances de h de la trace de $f(P+Q(h))$ et on donne son terme principal. Ici $f \in C_0^\infty(I)$, où I est un intervalle ouvert disjoint du spectre de P. Nous obtenons alors le comportement asymptotique de la fonction du comptage des valeurs propres dans les gaps avec une estimation optimale du reste.

Le second modèle étudié est un opérateur elliptique périodique d'ordre deux H_0 perturbé par un opérateur différentiel dépendant d'une grande constante de couplage $\lambda Q, \lambda \longrightarrow +\infty$. On obtient un développement asymptotique en puissances de $\lambda^{-1/\delta}$ de la trace de $f(H_0 + \lambda Q)$. Ici $f \in C_0^\infty(I)$, où I est un intervalle disjoint du spectre de H_0. Nous donnons également la formule de type Weyl avec l'estimation optimale du reste de la fonction de comptage des valeurs propres lorsque la constante de couplage tend vers l'infini.

Le troisième modèle étudié dans cette thèse est l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel très oscillent dépendant d'un petit paramètre semi-classique. Nous étudions le spectre discret de ce modèle.

Mots-clés : Opérateurs périodiques, formule de trace asymptotique, limite semi-classique, grandes constantes de couplage, développements asymptotiques, distribution des valeurs propres, densité d'états, champs magnétiques, perturbation très oscillante.

Table des matières

Notations

Dans ce manuscrit, nous utilisons les notations et les conventions suivantes :

• $\sigma(P)$- le spectre de l'opérateur P.

• $\sigma_{ess}(P)$- le spectre essentiel de l'opérateur P.

• $\sigma_{disc}(P)$- le spectre discret de l'opérateur P.

• $\rho(P)$- l'ensemble résolvant de l'opérateur P.

• $S(\mathbb{R}^n)$- l'espace de Schwartz.

• $\mathcal{S}^k_\delta(m, \mathbb{R}^{2n})$- l'espace des symboles.

• $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n})$- l'espace des symboles bornés.

• $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$- l'ensemble des matrices carrées de taille d.

• $\mathcal{S}^k_\delta(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$- l'espace des symboles à valeurs matricielles o*ù* les coefficients appartiennent à $\mathcal{S}^k_\delta(\mathbb{R}^{2n})$.

• $tr\ (P)$- la trace de l'opérateur P.

• $\widehat{tr}(A)$- la trace aux sens des matrices carrées de A.

• $a^w(x, hD_x)(où\ Op^w_h(a))$- opérateur h-pseudo-différentiel associé au symbole $a(x,\xi)$.

• Soit $a(x,\xi;h)$ un symbole dépendant de h. On écrit $a(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geq 0} a_j(x,\xi)h^j$ dans $\mathcal{S}^k_\delta(m, \mathbb{R}^{2n})$ si pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\Big(a(x,\xi;h) - \sum_{j=0}^N a_j(x,\xi)h^j\Big) \in \mathcal{S}^{k-N-1}_\delta(m, \mathbb{R}^{2n})$.

• $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$- l'espace des opérateurs linéaires bornés de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

• Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle x\rangle := (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}$, $D_x = \frac{1}{i}\partial_x$, $\nabla^* = -\nabla$, $T^*\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{2n}$ et $\mathbb{S}^{n-1}$: sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

• Soit f_h une fonction dépend d'un petit paramètre positive h, la relation $f_h = \mathcal{O}(h^N)$ signifie qu'il existe $C_N, h_N > 0$ tel que $|f_h| \leq C_N h^N$ pour tout $h \in]0, h_N[$.

• La relation $f_h = \mathcal{O}(h^\infty)$ signifie que pour tout $N \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2...\}$, on a $f_h = \mathcal{O}(h^N)$.

• On écrit $f_h \sim \sum_{j=0}^\infty a_j h^j$ si pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $f_h - \sum_{j=0}^N a_j h^j = \mathcal{O}(h^{N+1})$.

• On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur critique d'une fonction $V \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $x \in \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) = \lambda\}$ tel que $\nabla_x V(x) = 0$.

• $||.||_{tr}$ (resp. $||.||_{HS}$)- la norme trace (resp. Hilbert-Schmidt) des opérateurs.

• $\mathcal{F}_h$- la transformée de Fourier semi-classique et son inverse $\mathcal{F}_h^{-1}$: pour $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}_h\theta(\xi) = \int e^{-i(x,\xi)/h}\theta(x)dx$ et $\mathcal{F}_h^{-1}\theta(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int e^{i(x,\xi)/h}\theta(\xi)d\xi$.

• $\Im$(resp. $\Re$)- la partie imaginaire (resp.réelle) d'un nombre complexe.

Chapitre I

Introduction

1 Perturbation semi-classique des opérateurs différentiels elliptiques à coefficients périodiques

Soit $p(y,\xi) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha(y)\xi^\alpha$ un polynôme par rapport à la variable ξ, à coefficient C^∞, réel, vérifiant :

$(\mathbf{H_1})$ Pour tout $|\alpha| \leq 2m$, la fonction $y \longmapsto a_\alpha(y)$ est Γ-périodique, $\Gamma = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbb{Z}e_i$ étant un réseau de $\mathbb{R}^n$ et $(e_1, ..., e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

$(\mathbf{H_2})$ $\exists C_0 > 0$ telle que :

$$p_{2m}(y,\xi) := \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(y)\xi^\alpha \geq \frac{1}{C_0}|\xi|^{2m}. \tag{1.1}$$

Considérons l'opérateur $P_0 = p^w(y, D_y)$. Ici nous utilisons la quantification de Weyl (voir chapitre III). Il est bien connu que l'opérateur P_0 est essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (voir [18, 23]) de domaine $H^{2m}(\mathbb{R}^n) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); \partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n), \forall|\alpha| \leq 2m\}$. D'après la théorie de Floquet le spectre de P_0 est constitué par des bandes :

$$\sigma(P_0) = \sigma_{ess}(P_0) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} J_k \quad avec \quad J_k = \Big\{\lambda_k(\xi);\ \xi \in \mathbb{R}^n/\Gamma^*\Big\}.$$

Où, $\sigma(P_0)$ (resp. $\sigma_{ess}(P_0)$) désigne le spectre (resp. le spectre essentiel) de l'opérateur P_0. Ici $\lambda_1(\xi), ..., \lambda_k(\xi)$ sont les valeurs propres de Floquet associées à l'opérateur P_0 (voir chapitre II) et $\Gamma^* = \{\gamma^* \in \mathbb{R}^n; \gamma.\gamma^* \in 2\pi\mathbb{Z}; \forall\gamma \in \Gamma\}$ est le réseau dual associé à Γ.

Dans la première partie de la thèse, on s'intéresse à l'étude du spectre des perturbations lentes de l'opérateur P_0. Plus précisément on s'intéresse aux opérateurs de type :

$$\begin{aligned} P &:= p^w\Big(y, D_y + A(hy)\Big) + \Big(\varphi(hy)\widetilde{p}(y, D_y + A(hy))\Big)^w + \psi(hy, y; h) \\ &= P^w\Big(hy, y, D_y + A(hy); h\Big); \;\; (h \searrow 0). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ici $A(x) = (A_1(x), ..., A_n(x)) \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ et

$$P(x, y, \xi; h) = p(y,\xi) + \varphi(x)\widetilde{p}(y,\xi) + \psi(x, y; h).$$

On suppose que
($\mathbf{H_3}$) $\forall\alpha \neq 0; \exists C_{\alpha,i} > 0$ tels que : $|\partial_x^\alpha A_i(x)| \leqslant C_{\alpha,i}$.
($\mathbf{H_4}$) $\widetilde{p}(y,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} \widetilde{a}_\alpha(y)\xi^\alpha$ où $\widetilde{a}_\alpha(y)$ vérifie ($\mathbf{H_1}$).
($\mathbf{H_5}$) La fonction $\varphi(x)$ est à valeurs positives, bornée ainsi que toutes ses dérivées et tend vers zéro quand $|x|$ tend vers l'infini.
($\mathbf{H_6}$) Il existe $C > 0$ telle que :

$$p_{2m}(y,\xi) + \varphi(x)\widetilde{p}_{2m}(y,\xi) \geq \frac{1}{C}|\xi|^{2m}. \tag{1.3}$$

($\mathbf{H_7}$) La fonction $\psi(x,y;h) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}\times]0,h_0[;\mathbb{R})$; bornée ainsi que toutes ses dérivées, $\Gamma-$périodique par rapport à y et

$$\lim_{|x|\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^n, h\in]0,h_0]} \psi(x,y;h) = 0.$$

De plus, on suppose que ψ admet un développement asymptotique par rapport à h c.-à-.d $\psi(x,y;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} \psi_j(x,y)h^j$ dans $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n})$ (voir chapitre IV).

Soit $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}\setminus\sigma(P_0)$. En utilisant les hypothèses ($\mathbf{H_1} - \mathbf{H_7}$) on montre dans la proposition 1.2 que $\sigma_{ess}(P) \cap [\alpha,\beta] = \emptyset$. Donc les perturbations extérieures créent des valeurs propres isolées et de multiplicités finies dans l'intervalle $[\alpha,\beta]$. En particulier pour $f \in C_0^\infty(]\alpha,\beta[;\mathbb{R})$ l'opérateur $f(P)$ est de classe trace. Dans le chapitre IV nous démontrons les deux théorèmes suivants :

Théorème 1.1 (***cf. théorème 1.3***) *Sous les hypothèses* (($\mathbf{H_1}$) − ($\mathbf{H_7}$)) *et pour* $f \in C_0^\infty((\alpha,\beta);\mathbb{R})$ *il existe une suite de nombres réels* $(A_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que*

$$tr\Big(f\Big(P^w(hy,y,D_y + A(hy);h)\Big)\Big) \sim h^{-n}\sum_{k=0}^{+\infty} A_k(f)h^k, \qquad (h \searrow 0). \tag{1.4}$$

Si on suppose que $p(y,\xi) = \widetilde{p}(y,\xi)$ *et* $\psi_0(x,y) := \psi_0(x)$ *est indépendant de* y*, alors :*

$$\begin{aligned} A_0(f) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\geq 1}\int\int_{\mathbb{R}_x^n\times E^*} f\Big((1+\varphi(x))\lambda_k(\xi) + \psi_0(x)\Big)dxd\xi \\ &= \int\int_{\mathbb{R}_x^n\times\mathbb{R}_t} f\Big((1+\varphi(x))t + \psi_0(x)\Big)d\rho(t)dx. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ici $\rho(t)$ *désigne la densité d'états intégrée associée à* $p^w(y,D_y)$ *et* E^* *est une cellule de périodicité pour le réseaux dual de* Γ.

Définition 1.2 *On dit que* $\lambda_k(\xi_0)$ *est simple si* $\lambda_{k-1}(\xi_0) < \lambda_k(\xi_0) < \lambda_{k+1}(\xi_0)$.

Pour les deux théorèmes suivants on suppose que $p(y,\xi) = \widetilde{p}(y,\xi)$ et $\psi_0(x,y) := \psi_0(x)$ est indépendant de y. Fixons $\mu \in \mathbb{R}\setminus\sigma_{ess}(P)$ et posons

$$\Sigma_\mu = \Big\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n};\ \exists k \geq 1;\ \text{tel que } (1+\varphi(x))\lambda_k(\xi) + \psi_0(x) = \mu\Big\}.$$

Pour $(x_0, \xi_0) \in \Sigma_\mu$ on suppose que l'hypothèse suivante est vérifiée :

$$
(\mathbf{H}) \left\{ \begin{array}{c} \nabla_x \varphi(x_0)\lambda_k(\xi_0) + \nabla_x \psi_0(x_0) \neq 0 \\ \textit{où} \\ \lambda_k(\xi_0) \text{ est simple et } \nabla_\xi \lambda_k(\xi_0) \neq 0 \end{array} \right.
$$

Théorème 1.3 (***cf. théorème 1.5***). *Fixons $\mu \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(P)$ et supposons que les hypothèses $((\mathbf{H_1}) - (\mathbf{H_7}))$ et $(\mathbf{H})$ sont vérifiées. Soit $f \in C_0^\infty((\mu - \sigma, \mu + \sigma); \mathbb{R})$ et $\theta \in C_0^\infty((-\frac{1}{C}, \frac{1}{C}); \mathbb{R})$, avec $\theta = 1$ dans un petit voisinage de zéro. Il existe alors $\sigma > 0$, C assez grand et une suite de fonction $\gamma_j \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$, telle que pour tout $M, N \in \mathbb{N}$, on a*

$$
tr\Big(f(P)\, \mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - P) \Big) = h^{-n} \left(f(\tau) \sum_{j=0}^{M} \gamma_j(\tau) h^j + \mathcal{O}\left(\frac{h^{M+1}}{\langle \tau \rangle^N} \right) \right), \textit{ quand } h \searrow 0, \tag{1.6}
$$

uniformément en $\tau \in \mathbb{R}$, où $\langle \tau \rangle = (1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}$.

Remarque 1.4 *Dans tous les développements asymptotiques, on donne explicitement le premier terme $\gamma_0(\tau)$ (voir 1.5).*

Comme conséquence des théorèmes précédents on obtient l'asymptotique du type Weyl de la fonction du comptage des valeurs propres avec reste optimal.

Théorème 1.5 (***cf. théorème 1.2***). *On suppose que les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées pour $\mu \in \{\alpha, \beta\}$. Soit $\mathcal{N}_h([\alpha, \beta])$ la fonction du comptage des valeurs propres de P dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ comptées avec leurs multiplicités. Alors on a*

$$
\mathcal{N}_h([\alpha, \beta]) = a_0 h^{-n} + \mathcal{O}(h^{1-n}), \quad (h \searrow 0), \tag{1.7}
$$

avec

$$
a_0 = \int_{\mathbb{R}_x^n} \left[\rho\left(\frac{\beta - \psi_0(x)}{1 + \varphi(x)} \right) - \rho\left(\frac{\alpha - \psi_0(x)}{1 + \varphi(x)} \right) \right] dx. \tag{1.8}
$$

2 Asymptotiques dans la limite de grande constante de couplage

Dans la deuxième partie de cette thèse, on s'intéresse au cas de grande constante de couplage. Plus précisément on s'intéresse à l'étude spectrale des opérateurs du type :

$$
P_\lambda = \nabla^* a(y) \nabla + p(y) + \lambda\Big(\nabla^* g_1(y) a(y) \nabla + g_2(y) p(y) + g_3(y) \Big) \qquad (\lambda \nearrow +\infty).
$$

Où, λ est une grande constante de couplage (i.e, $\lambda \longmapsto +\infty$). On suppose que :
$(\widetilde{\mathbf{H}}_\mathbf{1})$ $\mathbb{R}^n \ni y \longmapsto a(y)$ est une fonction C^∞, à valeurs dans l'espace des matrices carrées, d'ordre n symétriques à coefficients réels. De plus on suppose qu'il existe $C > 0$, tel que

$$
\langle a(y)\omega, \omega \rangle \geq \frac{1}{C} ||\omega||^2, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n, \;\; \forall y \in \mathbb{R}^n.
$$

$(\widetilde{\mathbf{H}}_2)$ $y \longmapsto p(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ est Γ-périodique.
$(\widetilde{\mathbf{H}}_3)$ Pour $i = 1, 2, 3$, la fonction $y \longmapsto g_i(y)$ est C^∞ à valeurs positives et on suppose que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\phi_{0,i}, \phi_{1,i}, ... \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{R})$ et $r_N \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ tel que

$$g_i(y) = \sum_{j=0}^{N} \phi_{j,i}\left(\frac{y}{|y|}\right)|y|^{-\delta-j} + r_N(y), \;\; pour \;\; |y| \geqslant 1, \tag{2.1}$$

où

- $\phi_{j,i} \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1}, (0, +\infty))$. Ici $\mathbb{S}^{n-1}$ désigne la sphère unité de l'espace $\mathbb{R}^n$.
- $\phi_{0,i} > 0, i = 1, 2, 3,$
- δ est une constante strictement positive,
- $|\partial_y^\beta r_N(y)| \leqslant C_\beta(1 + |y|)^{-|\beta|-N-\delta-1}, \forall \beta \in \mathbb{N}.$

D'après l'hypothèse $(\widetilde{\mathbf{H}}_3)$ et la théorie des perturbations (plus précisément le théorème de Weyl) on a :

$$\sigma_{ess}(P_\lambda) = \sigma_{ess}(P_0) = \sigma(P_0) = \bigcup_{k=0}^{+\infty}\Big\{\lambda_k(\xi); \;\; \xi \in \mathbb{R}^n/\Gamma^*\Big\}.$$

Ici $\lambda_1(\xi), ..., \lambda_k(\xi)$ sont les valeurs propres de Floquet associées à l'opérateur P_0. Soit $[E_1, E_2] \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(P_\lambda)$, par conséquent la perturbation crée des valeurs propres isolées et de multiplicité finie dans l'intervalle $[E_1, E_2]$.
On s'intéresse à nouveau à la formule de trace et à la répartition des valeurs propres de l'opérateur P_λ dans l'intervalle $[E_1, E_2]$ lorsque λ tend vers l'infini. Dans le chapitre VI nous démontrons les résultats suivants :

Théorème 2.1 (***cf. théorème 1.2***) *Soit $f \in C_0^\infty((E_1, E_2); \mathbb{R})$. Sous l'hypothèse $(\widetilde{\mathbf{H}}_1), ..., (\widetilde{\mathbf{H}}_3)$, il existe une suite de nombres réels $(b_k(f))_{k\geq 0}$ telle que*

$$tr\Big(f(P_\lambda)\Big) \sim \lambda^{\frac{n}{\delta}} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(f)\lambda^{-\frac{k}{\delta}}, \qquad \lambda \nearrow +\infty. \tag{2.2}$$

Si $\phi_{0,1} = \phi_{0,2}$ alors,

$$\begin{aligned} b_0(f) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\int_{E^*\times\mathbb{R}^n_x}\sum_{k\geq 1} f\left((1+\phi_{0,1}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta})\lambda_k(\xi) + \phi_{0,3}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta}\right)dxd\xi \\ &= \int\int_{\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}_t} f\left((1+\phi_{0,1}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta})t + \phi_{0,3}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta}\right)d\rho(t)dx. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ici $\rho(t)$ désigne la densité d'états associée à l'opérateur $P_0 = \nabla^* a(y)\nabla + p(y)$.

Théorème 2.2 *Soient $f \in C_0^\infty((E_1 - \sigma, E_2 + \sigma); \mathbb{R})$ et $\theta \in C_0^\infty((-\frac{1}{C}, \frac{1}{C}); \mathbb{R})$, avec $\theta = 1$ au voisinage de zéro. Il existe alors $\sigma > 0$, $C > 0$ et une suite de fonctions $\gamma_j \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$ tels que pour tout*

$M, N \in \mathbb{N}$, on a

$$tr\left(f(P_\lambda)\,\mathcal{F}^{-1}_{\lambda^{-\frac{1}{\delta}}}\theta(\tau - P_\lambda)\right) = \lambda^{\frac{n}{\delta}}\left(f(\tau)\sum_{j=0}^{M}\gamma_j(\tau)\lambda^{-\frac{j}{\delta}} + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda^{-\frac{1}{\delta}}\lambda^{-\frac{M}{\delta}}}{\langle\tau\rangle^N}\right)\right), \quad \lambda \nearrow +\infty \tag{2.4}$$

uniformément en $\tau \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.3 (***cf. théorème 2.2***). *Supposons que les hypothèses $(\widetilde{\mathbf{H}}_\mathbf{1}), ..., (\widetilde{\mathbf{H}}_\mathbf{3})$ sont vérifiées. Soit $\mathcal{N}_\lambda([E_1, E_2])$ la fonction de comptage des valeurs propres de P_λ dans $[E_1, E_2]$ comptées avec leur multiplicité. Alors on a quand $\lambda \nearrow +\infty$*

$$\mathcal{N}_\lambda\Big([E_1, E_2]\Big) = D_0\lambda^{\frac{n}{\delta}} + \mathcal{O}\left(\lambda^{\frac{n-1}{\delta}}\right), \qquad (\lambda \nearrow +\infty), \tag{2.5}$$

où,

$$D_0 = \int_{\mathbb{R}^n_x} \rho\left(\frac{E_2 - \phi_{0,3}\Big(\frac{x}{|x|}\Big)|x|^{-\delta}}{1 + \phi_{0,1}\Big(\frac{x}{|x|}\Big)|x|^{-\delta}}\right) - \rho\left(\frac{E_1 - \phi_{0,3}\Big(\frac{x}{|x|}\Big)|x|^{-\delta}}{1 + \phi_{0,1}\Big(\frac{x}{|x|}\Big)|x|^{-\delta}}\right) dx. \tag{2.6}$$

3 Applications

Un des objectif de cette thèse est d'appliquer les résultats précédents à des hamiltoniens issus de la physique du solide et qui ne sont pas traités dans [10]. Dans la première application, nous considérons une perturbation couplée par rapport à la variable y et hy (i.e., $V(y, hy)$). Notons que dans [10] l'auteur a considéré des perturbations séparées (i.e., $V(y) + \varphi(hy)$). Dans la deuxième application, nous considérons des perturbations de l'opérateur de schrödinger avec champ magnétique constant.

3.1 Application pour des perturbations très oscillantes

Considérons l'opérateur de Schrödinger avec une perturbation très oscillantes

$$H(h) = H_0 + V(y, hy) = -\Delta_y + V(y, hy); \quad (h \searrow 0).$$

On suppose que le potentiel V satisfait les hypothèses suivantes :
$(\mathbf{A_1})$ $\lim_{|x|\to+\infty} V(y, x) = 0$
$(\mathbf{A_2})$ $V(y + \gamma, x) = V(y, x)$, $\forall\gamma \in \Gamma$.
$(\mathbf{A_3})$ Le potentiel V est une fonction à valeurs réelles bornée ainsi que toutes ses dérivées, c-à-d, $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{N}$

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta V(y, x)| \le C_{\alpha,\beta}, \;\; \forall(x, y) \in \mathbb{N}^{2n}.$$

$(\mathbf{A_4})$ On suppose qu'il existe un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\int_E V(y, x_0)dy < 0$.

Les hypothèses $(\mathbf{A_1}), ..., (\mathbf{A_4})$ assurent que $P(x, \xi) = p^w(x, y, D_y + \xi)$, où $p(x, y, \eta) = \eta^2 + V(y, x)$ est autoadjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma)$ et à résolvante compacte. Soient $\mu_1(x, \xi) \le \mu_2(x, \xi) \le ...$ les valeurs propres de $p^w(x, y, D_y+\xi)$ (répétées selon leur multiplicités). Grâce à l'hypothèse $(\mathbf{A_1})$ V est une perturbation relativement compacte, (c'est-à-dire $V(H_0+i)^{-1}$ est compacte). Par le théorème de Kato-Rellich et le théorème de Weyl, on déduit que l'opérateur de Schrödinger $H(h)$ est essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que

$$\sigma_{ess}(H(h)) = \sigma_{ess}(H_0) = \Big[0, +\infty\Big).$$

L'hypothèse $(\mathbf{A_4})$ assure que le spectre discret de l'opérateur $H(h)$ est non vide.

Pour l'opérateur $H(h)$, on étudiera dans ce travail lorsque $h \searrow 0$

- des formules de trace;
- la répartition des valeurs propres.

Théorème 3.1 (***cf. théorème 1.2***). *Soit $f \in C_0^\infty((-\infty,0);\mathbb{R})$. Supposons que le potentiel V vérifie les hypothèses $(\mathbf{A_1}),...,(\mathbf{A_4})$ alors l'opérateur $f(H(h))$ est de classe trace et il existe une suite de nombres réels $(a_k(f))_{j\in\mathbb{N}}$ telle que :*

$$tr\Big(f(H(h))\Big) \sim h^{-n}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f)\, h^k, \qquad (h\searrow 0). \tag{3.1}$$

Où ;

$$a_0(f) = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\geq 1}\int\int_{\mathbb{R}^n_x\times E^*} f(\mu_k(x,\xi))dxd\xi. \tag{3.2}$$

Ici $\mu_1(x,\xi),\mu_2(x,\xi),...,\mu_k(x,\xi),...$ sont les valeurs propres de l'opérateur $(D_y+\xi)^2+V(y,x)$ comme opérateur de $L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma)\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma)$.

On fixe $\lambda<0$, et soit

$$\Sigma_\lambda = \bigcup_{k=1}^{+\infty}\Big\{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times E^*;\ \mu_k(x,\xi)=\lambda\Big\}.$$

On suppose que l'hypothèse suivante est vérifiée :
$(\mathbf{A_5})$ pour $(x_0,\xi_0)\in\Sigma_\lambda$, $\mu_k(x_0,\xi_0)$ est simple et $\nabla_{x,\xi}\left(\mu_k(x_0,\xi_0)\right)\neq 0$

Théorème 3.2 (***cf. théorème 1.4***).*Sous les hypothèses $(\mathbf{A_1}),...,(\mathbf{A_5})$ il existe $\sigma>0$ assez petit et $C>0$ assez grand tels que, pour tout $f\in C_0^\infty((\lambda-\sigma,\lambda+\sigma);\mathbb{R})$ et $\theta\in C_0^\infty((-\frac{1}{C},\frac{1}{C});\mathbb{R})$, avec $\theta=1$ dans un petit voisinage de zéro, il existe une suite de fonctions $\gamma_j(\tau)\in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $j\in\mathbb{N}$, telle que pour tout $N,M\geq 1$ on a*

$$tr\left(f(H(h))\,\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau-H(h))\right) = h^{-n}\left(f(\tau)\sum_{j=0}^{M}\gamma_j(\tau)h^j + \mathcal{O}\left(\frac{h^M}{\langle\tau\rangle^N}\right)\right),\ \text{quand}\ h\searrow 0, \tag{3.3}$$

uniformément en $\tau\in\mathbb{R}$.

Théorème 3.3 *Soit $\lambda<0$ fixé. On désigne par $\mathcal{N}_h(\lambda)$ le nombre de valeurs propres de $H(h)$ dans $(-\infty,\lambda]$ comptées avec leur multiplicité. Sous les hypothèses, $(\mathbf{A_1}),...,(\mathbf{A_5})$ on a :*

$$\mathcal{N}_h(\lambda) = h^{-n}\Big(D_0+\mathcal{O}(h)\Big), \quad (h\searrow 0) \tag{3.4}$$

où,

$$D_0 = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k\geq 1} \int\int_{\{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n_x\times E^* \mid\ \mu_k(x,\xi)\leq\lambda\}} dx d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(\lambda, x) dx. \tag{3.5}$$

3.2 Perturbation des bandes magnétiques

On suppose maintenant que $p(y,\eta) = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 + V(y)$ *où* $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est Γ-périodique. Dans les chapitres IV et VI nous appliquons les résultats du cas semi-classique au cas des perturbations des bandes magnétiques. Plus précisément, nous étudions des opérateurs de type :

$$\begin{aligned} P &:= p^w\Big(y, D_y + \frac{\omega\times y}{2} + A(hy)\Big) + \Big(\varphi(hy)p(y, D_y + \frac{\omega\times y}{2} + A(hy))\Big)^w + \psi(hy, y; h) \\ &= P^w\Big(hy, y, D_y + \frac{\omega\times y}{2} + A(hy); h\Big);\ \ (h \searrow 0). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ici $P(x,y,\eta;h) = (1+\varphi(x))p(y,\eta) + \psi(x,y;h)$ et $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie $\langle\omega, \Gamma\times\Gamma\rangle \subset 2\pi\mathbb{Z}$ (voir chapitre IV, V théorème 3.5,1.2). Cette dernière hypothèse nous assure que le spectre de l'opérateur $p^w\Big(y, D_y + \frac{\omega\times y}{2}\Big)$ est un spectre de bande (comme celui de P_0). En particulier nous pouvons appliquer la théorie de Floquet et nous obtenons des théorèmes similaires aux théorème 1.1 et théorème 1.5.

4 Références et idées des démonstrations

Des solutions approchées ont été construites dans [9, 23, 25, 44, 45, 62] pour des hamiltoniens de la forme

$$H_h = -\Delta + V(y) + W(hy),$$

où V est un potentiel Γ-périodique et W décroit vers zéro à l'infini. Aussi la question de la dynamique a été traitée dans [9, 10, 16, 23, 25, 44, 45, 62].

Des formules de trace et l'asymptotique de la fonction de comptage du spectre discret ont été obtenus dans [10, 12]. Des questions sur les résonances, la théorie de scattering et des formules de trace pour les résonances pour les opérateurs H_h ont été considérées dans [19, 20].

Pour le cas des grandes constantes de couplage, des opérateurs du type

$$H_\lambda = -\Delta + V(y) + \lambda W(y)$$

ont été étudiés dans [1, 2, 12, 14, 35].

En particulier Dimassi a obtenu des formules de trace et des asymptotiques du type (2.2), (2.4), (2.5). Le premier terme de l'asymptotique (2.5) a été obtenu dans [1, 6, 35, 59].

4.1 Idées des démonstrations

Cas semi-classique

Pour les opérateurs h-pseudo-différentiels des résultats des types (2.2), (2.4), (2.5) ont été obtenus depuis longtemps par plusieurs auteurs. Pour les détails et les références, nous renvoyons à [18, 39, 55].

Dans cette thèse nos hamiltoniens ne sont pas des opérateurs h-pseudo-différentiels. En fait nous avons deux variables d'échelle différentes y et hy avec $h \searrow 0$. Pour cela nous utilisons la méthode de l'hamiltonien effectif qui consiste à réduire l'étude spectrale de l'opérateur P à celui d'un système d'opérateur h-pseudo-différentiel

$$E_{-+}^{w}(x, hD_x, z; h) = E_{-+,0}^{w}(x, hD_x, z) + E_{-+,1}^{w}(x, hD_x, z) + \cdots$$

(voir corollaire 2.5). Rappelons que dans l'étude des opérateurs h-pseudo-différentiels la surface caractéristique

$$\Sigma_z := \Big\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times E^*;\ \det E_{-+,0}(x,\xi,z) = 0\Big\}$$

joue un rôle essentiel. D'autre part, par construction de l'hamiltonien effectif (voir proposition 2.1 et remarque 2.2) on a :

$$(x,\xi) \in \Sigma_z \Longleftrightarrow z \in \sigma(P(x,\xi))$$

où $P(x,\xi) = P_0^w(x, y, D_y + \xi)$ est l'opérateur non borné de $L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma)$. Ici pour (x,ξ) fixé $P_0^w(x, y, D_y + \xi)$ est l'opérateur associé au symbole $P_0(x,y,\xi) = p(y,\xi) + \varphi(x)\widetilde{p}(y,\xi) + \psi_0(x,y)$. C'est pourquoi tous nos résultats dépendent des valeurs propres $\mu_k(x,\xi)$ de l'opérateur $P(x,\xi)$. Dans le début du chapitre IV, nous donnons une brève description de la méthode de l'hamiltonien effectif.

Cette réduction nous permet d'utiliser la théorie des opérateurs h-pseudo-différentiels et surtout les méthodes stationnaires développées par Dimassi-Sjöstrand pour prouver les théorèmes 1.1, 1.3, 1.5.

Grandes constantes de couplages

Classiquement l'opérateur $f(P_\lambda)$ est localisé dans $\{(y,\eta);\ P_\lambda(y,\eta) \in \operatorname{supp} f\}$. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Par hypothèse $g_i(y)$ est strictement positive surtout compacte, cela implique que $P_\lambda(y,\eta)$ tend vers l'infini lorsque λ tend vers $+\infty$ et $y \in K$. En particulier $\{(y,\eta);\ y \in K,\ P_\lambda(y,\eta) \in \operatorname{supp} f\} = \emptyset$. Ceci va nous permettre de prouver que quantiquement, modulo $\mathcal{O}(\lambda^{-\infty})$, la trace de $f(P_\lambda)$ ne dépend que du comportement de $g_i(y)$ à l'infini. L'hypothèse $(\widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{3}})$ implique que $\lambda g_i(y) = \varphi(hy; h) = \varphi_0(hy) + h\varphi_1(hy) + \cdots + h^j\varphi_j(hy) + \cdots$ pour y très grand où $h = \lambda^{-1/\delta}$ et $\varphi_j(x) = \phi_{j,i}(x/|x|)|x|^{-\delta-j}$. Par conséquent, on ramène l'étude de l'opérateur $f(P_\lambda)$ pour λ assez grand à celui d'un problème semi-classique. Maintenent il suffit d'appliquer les théorèmes 1.1, 1.3, 1.5 pour obtenir les théorèmes 2.1, 2.2, 2.3.

Chapitre II

Rappels sur les opérateurs périodiques et h-pseudo-différentiels

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques résultats élémentaires sur les opérateurs h-pseudo-différentiels (voir [18, 22, 54]) et la théorie spectrale des deux modèles périodiques (c.f [53, 62]) qui seront utilisés dans la suite de cette thèse.

1 Rappels sur les opérateurs h-pseudo-différentiels

1.1 Opérateurs h-pseudo-différentiels

On commence par donner les définitions des symboles et des opérateurs h-pseudo-différentiels.

Définition 1.1 (*[13]*) **.** *Soit $h_0 > 0$ assez petit. Pour $k \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0,1)$, on désigne par $\mathcal{S}^k_\delta(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$ l'ensemble des fonctions $a(x, \xi, h) \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^n \times (0, h_0); \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$, telles que :*
Pour tout multi-indice $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_{\alpha,\beta} > 0$ tel que

$$\left\| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi, h) \right\|_{\mathbb{M}_d(\mathbb{C})} \leqslant C_{\alpha,\beta} h^{k-\delta(|\alpha|+|\beta|)},$$

uniformément en h dans $(0, h_0)$. Si le symbole $a(x, \xi, z, h)$ dépend d'un paramètre supplémentaire $z \in \Omega \subset \mathbb{C}$, alors $a \in \mathcal{S}^k_\delta(\mathbb{R}^{2n}; M_d(\mathbb{C}))$ si et seulement si la constante $C_{\alpha,\beta}$ est indépendante de $z \in \Omega$. Si $k = 0, \delta = 0$, on écrit $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$ au lieu de $\mathcal{S}^0_0(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$ et lorsque $\delta = 0$, on note simplement $\mathcal{S}^k(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$.

Définition 1.2 (*[13]*) **.** *À un symbole $a \in \mathcal{S}^k_\delta(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$, on associe un opérateur h-pseudo-différentiel de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ défini par*

$$a^w(x, hD_x; h)u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y).\xi/h} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi; h\right) u(y) d\xi dy, \ u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n).$$

Théorème 1.3 (*[55], théorème II-36*)**.** *Soit $a \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$. Il existe un réel C_n et un entier d_n ne dépendent que de la dimension n telle que :*

$$\|a^w(x, hD_x; h)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}))} \leq C_n \sup_{|\alpha|+|\beta| \leq d_n} \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}} \left\| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi; h) \right\|_{\mathbb{M}_d(\mathbb{C})}.$$

Proposition 1.4 *([18], proposition 13.8)***(Continuité sur L^2).** *Supposons que $a = a(x,\xi;h) \in \mathcal{S}^0_\delta(\mathbb{R}^{2n}; M_d(\mathbb{C}))$, $0 \leq \delta \leq 1/2$, alors*

$$a^w(x, hD_x; h) : L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^d)$$

est un opérateur borné et il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que pour tout $0 < h \leq 1$;

$$\|a^w(x, hD_x; h)\| \leq C.$$

Proposition 1.5 *([18], proposition 8.5)***(Inversibilité).** *Soit $a \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$. On suppose que a est elliptique alors il existe un symbole $b \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$ tel que pour h assez petit on a :*

$$a^w(x, hD_x; h) \circ b^w(x, hD_x; h) = b^w(x, hD_x; h) \circ a^w(x, hD_x; h) = I.$$

Théorème 1.6 *([32], lemme 2.1)***(Supports disjoints).** *Si P, χ_1, χ_2 appartiennent à un borné B de $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$ et si $dist(supp\chi_1, supp\chi_2) \geq \epsilon > 0$ alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C_N > 0$ (ne dépend que de B et de ϵ) telle que :*

$$\|\chi_1 P \chi_2\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}))} \leq C_N h^N \Big(dist\,(supp\chi_1, supp\chi_2)\Big)^{-N}.$$

Si de plus $\chi_1 \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $C'_N > 0$ telle que :

$$\|\chi_1 P \chi_2\|_{tr} \leq C'_N h^N.$$

Théorème 1.7 *([18], proposition 8.3)***(Composition des opérateurs).** *Soit $\delta \in [0, \frac{1}{2})$ et soient $a_1, a_2 \in \mathcal{S}^0_\delta(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$, alors il existe $r \in \mathcal{S}^0_\delta(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$ tel que :*

$$a_1^w(x, hD_x; h) \circ a_2^w(x, hD_x; h) = r^w(x, hD_x; h).$$

De plus,

$$r(x, \xi; h) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Big(\Big(\frac{ih}{2} \sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta) \Big)^k a_1(x, \xi) a_2(y, \eta) \Big) \Big|_{y=x, \eta=\xi},$$

dans $\mathcal{S}^0_\delta(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$, où σ est le produit symplectique défini par $\sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta) = D_y.D_\xi - D_x.D_\eta$.

Ici la notation : $a \sim \sum_{j=0}^\infty a_j h^j$ dans $\mathcal{S}^0_\delta(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$, signifie que pour tout entier N, on a : $a - \sum_{j=0}^N a_j h^j \in \mathcal{S}^{N+1}_\delta(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$.

1.2 Calcul fonctionnel par la formule de Helffer-Sjöstrand.

On commence par introduire la formule de Helffer-Sjöstrand.

Proposition 1.8 *([18]).* *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R})$, alors il existe une fonction $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{C})$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$*

$$|\overline{\partial}_z \widetilde{f}(z)| \leq C_N |\Im(z)|^N,$$

$$\widetilde{f}\Big|_{\mathbb{R}} = f.$$

Ici $\overline{\partial}_z := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$. *On dit que* $\widetilde{f}$ *est une extension presque analytique de* f.

Théorème 1.9 ([*18*], *théorème 8.1*) **(Formule de Helffer-Sjöstrand)** . *Soit* A *un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$. *Soit* $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R})$ *et* $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{C})$ *l'extension presque analytique de* f *avec* $|\overline{\partial}_z \widetilde{f}(z)| = \mathcal{O}(|\Im(z)|^N)$. *Alors*

$$f(A) = -\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}_z \widetilde{f}(z)(z-A)^{-1}L(dz),$$

où $L(dz) = dxdy$ *est la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2_{x,y}$.

Théorème 1.10 ([*18*], *proposition 8.3*)**(Caractérisation de Beal)**. *Soit* $A = A_h : S(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^d) \to S'(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^d)$, $0 < h \leq 1$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $A = a^w(x, hD_x; h)$, *pour certain* $a(x,\xi;h) \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}; M_d(\mathbb{C}))$.

2. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ *et pour toutes formes linéaires* $l_1(x,\xi)$,..., $l_N(x,\xi)$ *sur* $\mathbb{R}^{2n}$, *l'opérateur* $\mathrm{ad}_{l_1^w(x,hD_x)} \circ \cdots \circ \mathrm{ad}_{l_N^w(x,hD_x)} A_h$ *appartient à* $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$ *et est de norme* $\mathcal{O}(h^N)$ *dans cet espace.*

Ici $ad_A B$ *est le commutateur de* A *et* B *donné par* $\mathrm{ad}_A B := [A,B] = AB - BA$.

Théorème 1.11 ([*18*]). *Soit* $P(x,\xi;h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} h^j P_j(x,\xi) \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$, *on suppose que* $P(x,\xi;h)$ *est hermitien. Alors* $f\Big(P^w(x,hD_x;h)\Big)$ *est un opérateur h-pseudo-différentiel, son symbole est dans* $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$ *et* $f(P^w(x,hD_x;h)) = C^w(x,hD_x;h)$ *avec* $C(x,\xi;h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} h^j C_j(x,\xi)$, *où* $C_0(x,\xi) = f(P_0(x,\xi))$.

1.3 Opérateurs à trace.

On rappelle quelques critères pour qu'un opérateur h-pseudo-différentiel soit de classe trace.

Théorème 1.12 ([*18*], *théorème 9.5*), ([*55*], *théorème II-53*). *Soit* $P(x,\xi;h)$ *un symbole dans* $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$. *On suppose que* $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta P(x,\xi;h) \in L^1(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$ *pour tout* $|\alpha| + |\beta| \leqslant 2n+1$. *Alors* $P^w(x,hD_x;h)$ *est un opérateur de classe trace et on a :*

$$tr\Big(P^w(x,hD_x;h)\Big) = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}} \widehat{tr}\Big(P(x,\xi;h)\Big)dxd\xi.$$

De plus $\exists C_n$ (*qui ne dépend que de la dimension*) *telle que*

$$\Big\|P^w(x,hD_x;h)\Big\|_{tr} \leqslant C_n h^{-n} \sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant 2n+1} \Big\|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta P(x,\xi;h)\Big\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})}.$$

Théorème 1.13 ([*55*], *proposition II-56*). *Soit* $a \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$. *Alors, pour tout symbole* $b \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$, *on a*

$$tr\Big(a^w(x,hD_x;h) \circ b^w(x,hD_x;h)\Big) = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int\int \widehat{tr}\Big(a(x,\xi;h)b(x,\xi;h)\Big)dxd\xi.$$

Théorème 1.14 ([55]). *Soit* $P(x, \xi; h) \sim \sum_{j=0}^{n} h^j P_j(x, \xi)$ *dans* $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$. *On suppose que*

$$K := \Big\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}; \exists \tau \in [a, b]; \;\; det\Big(P_0(x, \xi) - \tau\Big) = 0\Big\}$$

est un ensemble compact. Alors pour $f \in \mathcal{C}_0^\infty((a, b); \mathbb{R})$ *;* $f(P^w(x, hD_x; h))$ *est de classe trace et on a :*

$$tr\Big(f(P^w(x, hD_x; h))\Big) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} a_j(f) h^{j-n} \qquad (h \searrow 0),$$

où,

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \widehat{tr}\Big[f\Big(P_0(x, \xi)\Big)\Big] dx d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \sum_{j=1}^{d} f\Big(\lambda_j(x, \xi)\Big) dx d\xi. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ici $(\lambda_j(x, \xi))_{1 \leq j \leq d}$ *sont les valeurs propres de* $P_0(x, \xi)$.

2 Rappel sur les opérateurs périodiques

2.1 Spectre du modèle périodique

On commence par décrire le spectre des deux modèles périodiques. Puis, on introduit les objets centraux de la théorie de Bloch-Floquet, notamment la transformation de Bloch-Floquet, la translation magnétique, et on décrit leur propriétés.

Soit $p(y, \xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(y) \xi^\alpha$ un polynôme par rapport à la variable ξ, à coefficient C^∞, réel vérifie les hypothèses suivantes :

($\mathbf{H_1}$) Pour tout $|\alpha| \leq 2m$, la fonction $y \longmapsto a_\alpha(y)$ est Γ-périodique.

($\mathbf{H_2}$) $\exists C_0 > 0$ tel que

$$p_{2m}(y, \xi) = \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(y) \xi^\alpha \geq \frac{1}{C_0} |\xi|^{2m}. \tag{2.1}$$

Nous allons étudier ici le spectre de l'opérateur périodique $P_0 = p^w(y, D_y)$, on suppose que les hypothèses ($\mathbf{H_1}$) et ($\mathbf{H_2}$) sont vérifiées, on utilise généralement la théorie de Floquet.

On définit la transformation de Floquet-Bloch de la fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par :

$$(\mathcal{U}f)(y, \theta) := \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{i(-y+\gamma)\theta} f(y - \gamma) \; ; \quad (y, \theta) \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{2.2}$$

Lemme 2.1 *La transformation* $\mathcal{U}$ *satisfait les identités suivantes :*

- $(\mathcal{U}f)(y + \gamma, \theta) = f(y, \theta); \; \forall \gamma \in \Gamma,$

- $(\mathcal{U}f)(y, \theta + \gamma^*) = e^{-i\langle \gamma^*, y \rangle} (\mathcal{U}f)(y, \theta); \; \forall \gamma^* \in \Gamma^*.$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\gamma \in \Gamma$. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{U}f(y+\gamma,\theta) &= \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-iy\theta} f(y) \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{i(-y+\gamma)\theta} f(y-\gamma) \\ &= \mathcal{U}f(y,\theta) \end{aligned} \tag{2.3}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{U}f(y,\theta+\gamma^*) &= \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{i(-y+\gamma)(\theta+\gamma^*)} f(y-\gamma) \\ &= e^{-i\langle\gamma^*,y\rangle} \sum_{\gamma\in\Gamma} \underbrace{e^{-i\gamma\gamma^*}}_{=1} e^{i(-y+\gamma)\theta} f(y-\gamma) \\ &= e^{-i\langle\gamma^*,y\rangle} \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{i(-y+\gamma)\theta} f(y-\gamma) = e^{-i\langle\gamma^*,y\rangle}\mathcal{U}f(y,\theta) \end{aligned} \tag{2.4}$$

dans (2.4) on a utilisé le fait que $\gamma^* \in \Gamma^*$.

Définition 2.2 *On définit :*

$$\mathcal{H} := \Big\{ u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)/ \quad u(y+\theta) = e^{i\gamma.\theta}u(y); \ \ \forall \gamma \in \Gamma \Big\}.$$

Lemme 2.3 $\mathcal{U}$ *se prolonge en une application unique unitaire*

$$\mathcal{U} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \int_{M^*}^{\oplus} \mathcal{H} dk = L^2(M^*;\mathcal{H})$$

et son inverse est donné par $(\mathcal{U}^{-1}u)(y) := \displaystyle\int_{M^*} e^{i\theta.y} u(\theta,y)d\theta.$

Preuve. On peut montrer que $\mathcal{U}$ est une isométrie, en effet :

$$\begin{aligned} ||\mathcal{U}f||^2_{\mathcal{H}} &= \langle \mathcal{U}f, \mathcal{U}f\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \int_{M^*}\int_M \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{\gamma'\in\Gamma} e^{i(\gamma-\gamma')\theta}\overline{f(y-\gamma')} f(y-\gamma) dy d\theta \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{\gamma'\in\Gamma} \int_M \overline{f(y-\gamma')} f(y-\gamma) \underbrace{\int_{M^*} e^{i(\gamma-\gamma')\theta} d\theta\, dy}_{=\delta_{\gamma,\gamma'}} \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma}\int_M |f(y-\gamma)|^2 dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^2 dy = ||f||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \tag{2.5}$$

puisque $\displaystyle\int_{M^*} e^{i(\gamma-\gamma')\theta} d\theta = \delta_{\gamma,\gamma'} = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma = \gamma' \\ 0 & \text{si } \gamma \neq \gamma' \end{cases}$

On va montrer que $\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}f = f$ pour tout $f \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}f(y) &= \int_{M^*} e^{i\theta y}\left(\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{i(-y+\gamma)\theta} f(y-\gamma)\right) d\theta \\
&= \int_{M^*} e^{i\theta y}\left(\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{i(-y+\gamma)\theta} e^{-i\gamma\theta} f(y)\right) d\theta \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} f(y) \underbrace{\int_{M^*} e^{-i\theta\gamma} d\theta}_{=\delta_{\gamma,0}} = f(y).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

puisque $\displaystyle\int_{M^*} e^{-i\theta.\gamma} d\theta = \delta_{\gamma,0} = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma = 0 \\ 0 & \text{si } \gamma \neq 0 \end{cases}$

On va montrer de la même manière que $\mathcal{U}^{-1}$ est une isométrie de $L^2(M^*;\mathcal{H})$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, en effet :

$$\begin{aligned}
||\mathcal{U}^{-1}f||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_{M^*} e^{i\theta y} f(\theta, y) d\theta \Big|^2 dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_{M^*} e^{i\theta y} e^{i\gamma\theta} f(\theta, y-\theta) d\theta \Big|^2 dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{M^*} \Big| e^{i\theta y} f(\theta, y-\theta) \Big|^2 d\theta dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{M^*} \Big| f(\theta, y) \Big|^2 dy d\theta = ||f||^2_{\mathcal{H}}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Dans (2.7) on a utilisé le fait que $f(\theta, y) = e^{i\gamma\theta} f(\theta, y-\theta)$ puisque $f \in \mathcal{H}$, donc $\mathcal{U}^{-1}$ est surjective et par suite $\mathcal{U}$ est injective ce qui prouve que $\mathcal{U}$ est unitaire de $L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(M^*, \mathcal{H})$.

$\square$

Proposition 2.4 *L'hamiltonien $P_0 = p^w(y, D_y)$ se transforme par la transformation de Bloch-Floquet en*

$$\mathcal{U}P_0\mathcal{U}^{-1} = \int_{M^*}^{\oplus} P_0(\theta) d\theta,$$

où, $P_0(\theta) = p^w(y, D_y + \theta)$.

Preuve. On va montrer que $\mathcal{U}(P_0 f)(y,\theta) = (P_0(\theta))(\mathcal{U}f)(y,\theta)$, où $P_0(\theta) = p^w(y, D_y+\theta)$. Un calcul simple montre que :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{U}P_0 f)(y,\theta) &= e^{i\langle\gamma^*, y\rangle}(\mathcal{U}P_0 f)(y, \theta+\gamma^*) \\
&= e^{i\langle\gamma^*, y\rangle} \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-iy\theta} P_0 e^{iy\theta} e^{i(-y+\gamma)(\theta+\gamma^*)} f(y-\gamma) \\
&= e^{i\langle\gamma^*, y\rangle} \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-iy\theta} P_0 e^{iy\theta} e^{i(-y+\gamma)\theta} e^{-i\langle\gamma^*, y\rangle} \underbrace{e^{i\gamma^*\gamma}}_{=1} f(y-\gamma) \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} P_0(\theta) e^{i(-y+\gamma)\theta} f(y-\gamma) \\
&= (P_0(\theta))(\mathcal{U}f)(y,\theta).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Dans (2.8) on a utilisé le fait que $e^{-iy\theta}P_0 e^{iy\theta} = P_0(\theta)$, en effet :

$$(D_y)\left[e^{i\theta.y}u(y,\theta)\right] = \theta e^{i\theta.y}u(y,\theta) + e^{i\theta.y}(D_y u)(y,\theta) = e^{i\theta.y}\left(\left[D_y+\theta\right]u\right)(y,\theta)$$

ce qui implique

$$(D_y)\left[e^{i\theta.y}u(y,\theta)\right] = e^{i\theta.y}\Big(\Big[D_y+\theta\Big]u\Big)(y,\theta)$$

et par suite

$$\left(D_y^2\right)\left[e^{i\theta.y}u(y,\theta)\right] = e^{i\theta.y}\left(\left[D_y+\theta\right]^2 u\right)(y,\theta).$$

Donc on a démontré $e^{-iy\theta}(D_y^2)e^{iy\theta} = (D_y+\theta)^2$. On démontre de la même manière que $e^{-iy\theta}(D_y^\alpha)e^{iy\theta} = (D_y+\theta)^\alpha$ et par suite $e^{-iy\theta}p^w(y,D_y)e^{iy\theta} = p^w(y,D_y+\theta) = P_0(\theta)$. En utilisant (2.8) et [53, section XIII.16] on obtient :

$$\mathcal{U}P_0\mathcal{U}^{-1} = \int_{M^*}^{\oplus} P_0(\theta)dk, \tag{2.9}$$

où, $P_0(\theta) = p^w\left(y, D_y+\theta\right)$.

□

L'opérateur $P_0(\theta)$ est un opérateur différentiel elliptique à résolvante compacte, en effet :

$$(P_0(\theta)+i)^{-1} \in \mathcal{L}\Big(L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma); H^k(\mathbb{R}^n/\Gamma)\Big),$$

de plus :

$$(P_0(\theta)+i)^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma) \longrightarrow H^k(\mathbb{R}^n/\Gamma) \xrightarrow{\ i\ } L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma).$$

D'après le théorème de Rellich, l'injection i est compacte et par suite $(P_0(\theta)+i)^{-1}$ est compact de $L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma)$ et en utilisant un résultat pour les opérateurs elliptiques (voir [53, théorème XIII.64]) le spectre de l'opérateur $P_0(\theta)$ est discret et consiste en une réunion d'intervalles de l'axe réel $[E_{2n+1}(\theta); E_{2n+2}(\theta)]$, $n \in \mathbb{N}$, pour lesquels :

$$E_1(\theta) \leqslant E_2(\theta) \leqslant E_3(\theta) \leqslant .... \leqslant E_{2n}(\theta) \leqslant E_{2n+1}(\theta) \leqslant E_{2n+2}(\theta) \leq ....$$

$$E_n(\theta) \longrightarrow +\infty, \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Les $(E_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ sont les valeurs propres de l'opérateur $P_0(\theta)$; ces valeurs propres sont traditionnellement appelées valeurs propres de Floquet, les intervalles introduits ci-dessus sont les bandes spectrales, et les intervalles $(E_{2n}; E_{2n+1})$, $n \in \mathbb{N}^*$ sont appelés lacunes spectrales. Lorsque $E_{2n} < E_{2n+1}$, on dit que la n-ième lacune est ouverte, et lorsque $[E_{2n-1}; E_{2n}]$ est séparé du reste du spectre par des lacunes ouvertes, la n-ième bande est dite isolée. Donc d'après (2.9), on déduit que :

$$\sigma(P_0) = \bigcup_{l=1}^{\infty} \Lambda_l, \quad \Lambda_l = E_l(M^*).$$

Lemme 2.5

$$\sigma\Big(p^w\Big(y, D_y\Big)\Big) = \sigma_{ess}\Big(p^w\Big(y, D_y\Big)\Big) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Lambda_k \quad avec \quad \Lambda_k = \lambda_k(\mathbb{R}^n/\Gamma^*).$$

On rappelle que $\sigma_{ess}(A)$, le spectre essentiel de A est donné par $\sigma_{ess}(A) = \sigma(A) \backslash \sigma_{disct}(A)$, où $\sigma_{disc}(A)$ est l'ensemble des valeurs propres isolées de A de multiplicité finie.

Définition 2.6 (*voir [60]*) **(Densité d'états intégrée).** *On définit la densité d'états intégrée $\rho(t)$ associée à l'opérateur $P_0 = p^w(y, D_y)$ par :*

$$\rho(t) := \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k\geq 1} \int_{\{\xi \in E^*;\ \lambda_k(\xi) \leqslant t\}} d\xi. \tag{2.10}$$

Où, $(\lambda_k(\xi))_{k\geq 1}$ désignent les valeurs propres de Floquet associées à l'opérateur P_0.

2.2 Spectre du modèle périodique avec champ magnétique constant

Dans cette sous-section nous supposons que $p(y, \eta) = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 + V(y)$ ou $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est Γ-périodique.

Désignons par $\omega = (\omega_1, .., \omega_n)$ la constante magnétique. Maintenant on s'intéresse à l'étude du spectre de l'opérateur suivant $P_0 = p^w\left(y, D_y + \frac{\omega\times y}{2}\right)$, on suppose que les hypothèses $(\mathbf{H_1})$ et $(\mathbf{H_2})$ sont vérifiées.

On définit la translation magnétique introduite par Zak (voir [63]) :

$$T_\alpha^\omega \psi(y) := e^{i\langle \frac{\omega\times y}{2}, \alpha\rangle} \psi(y-\alpha);\ \alpha \in \Gamma.$$

Lemme 2.7 *La translation T_α^ω laisse invariant l'opérateur $P_0 = p^w\left(y, D_y + \frac{\omega\times y}{2}\right)$ c'est-à-dire :*

$$T_\alpha^\omega P_0 (T_\alpha^\omega)^{-1} = P_0$$

Preuve. Un calcul simple donne :

$$\begin{aligned} T_\alpha^\omega \left(D_y + \frac{\omega\times y}{2}\right)\psi(y) &= e^{i\langle \frac{\omega\times y}{2}, \alpha\rangle}\left(D_y + \frac{\omega\times (y-\alpha)}{2}\right)\psi(y-\alpha) \\ &= \left(D_y + \frac{\omega\times y}{2}\right) e^{i\langle \frac{\omega\times y}{2}, \alpha\rangle}\psi(y-\alpha) \\ &= \left(D_y + \frac{\omega\times y}{2}\right) T_\alpha^w \psi(y). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Dans (2.11) on a utilisé le fait que :

$$\begin{aligned} (D_y)\left[e^{i\langle \frac{\omega\times y}{2}, \alpha\rangle}\psi(y-\alpha)\right] &= -\frac{\langle \omega\times\alpha\rangle}{2} e^{i\langle \frac{\omega\times y}{2}, \alpha\rangle}\psi(y-\alpha) + e^{i\langle \frac{\omega\times y}{2}, \alpha\rangle}(D_y\psi)(y-\alpha) \\ &= e^{i\langle \frac{\omega\times y}{2}, \alpha\rangle}\left(\left[D_y - \frac{\omega\times\alpha}{2}\right]\psi\right)(y-\alpha) \end{aligned} \tag{2.12}$$

ainsi $(T^\omega_\alpha)^{-1}\left(D_y+\frac{\omega\times y}{2}\right)T^\omega_\alpha=\left(D_y+\frac{\omega\times y}{2}\right)$, de la même manière on montre que

$$(T^\omega_\alpha)^{-1}\left(D_y+\frac{\omega\times y}{2}\right)^\alpha T^\omega_\alpha=\left(D_y+\frac{\omega\times y}{2}\right)^\alpha,$$

et par suite $(T^\omega_\alpha)^{-1}P_0T^\omega_\alpha=P_0$.

Lemme 2.8 *La translation T^ω_α satisfait ces relations*

$$T^\omega_\alpha T^\omega_\beta=e^{-\frac{i}{2}\langle\omega,\alpha\times\beta\rangle}T^\omega_{\alpha+\beta}=e^{-i\langle\omega,\alpha\times\beta\rangle}T^w_\beta T^\omega_\alpha;\ \ \forall\alpha,\beta\in\Gamma. \tag{2.13}$$

Preuve. Un calcul simple donne

$$\begin{aligned}T^\omega_\alpha T^\omega_\beta\psi(y)&=T^\omega_\alpha\left(e^{i\langle\frac{\omega\times y}{2},\beta\rangle}\psi(y-\beta)\right)\\&=e^{i\langle\frac{\omega\times y}{2},\alpha\rangle}e^{i\langle\frac{\omega(y-\alpha)}{2},\beta\rangle}\psi(y-\alpha-\beta)\\&=e^{\frac{-i}{2}\langle\omega,\alpha.\beta\rangle}e^{i\langle\frac{\omega\times y}{2},\alpha+\beta\rangle}\psi(y-\alpha-\beta)\\&=e^{\frac{-i}{2}\langle\omega,\alpha\times\beta\rangle}T^\omega_{\alpha+\beta}\psi(y),\end{aligned} \tag{2.14}$$

et

$$\begin{aligned}e^{\frac{-i}{2}\langle\omega,\alpha\times\beta\rangle}T^\omega_{\alpha+\beta}\psi(y)&=e^{-i\langle\omega,\alpha\times\beta\rangle}e^{\frac{i}{2}\langle\omega,\alpha\times\beta\rangle}T^\omega_{\alpha+\beta}\psi(y)\\&=e^{-i\langle\omega,\alpha\times\beta\rangle}T^\omega_\beta T^\omega_\alpha\psi(y).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Dans (2.15) on a utilisé le fait que

$$\begin{aligned}T^\omega_\beta T^\omega_\alpha\psi(y)&=T^\omega_\beta\left(e^{i\langle\frac{\omega\times y}{2},\alpha\rangle}\psi(y-\alpha)\right)\\&=e^{i\langle\frac{\omega\times y}{2},\beta\rangle}e^{i\langle\frac{\omega\times(y-\beta)}{2},\alpha\rangle}\psi(y-\alpha-\beta)\\&=e^{\frac{i}{2}\langle\omega,\alpha.\beta\rangle}T^\omega_{\alpha+\beta}\psi(y).\end{aligned}$$

Remarque 2.9 *On ne peut pas appliquer la théorie de Floquet (en général) car les T^ω_α ne commutent pas (en général) entre eux, dans toute la suite on suppose que :*

$$\langle\omega,\Gamma\times\Gamma\rangle\in(2\pi\mathbb{Z})^n. \tag{2.16}$$

Si (2.16) *est vérifié alors $e^{-\frac{i}{2}\langle\omega,\alpha\times\beta\rangle}=1,\forall\alpha,\beta\in\Gamma$ et en utilisant* (2.13) *on obtient $T^\omega_\alpha T^\omega_\beta=T^\omega_\beta T^\omega_\alpha$ donc $G=\{T_\alpha;\ \alpha\in\Gamma\}$ est un groupe abélien. D'après* (2.13) *et si* (2.16) *est vérifiée on obtient :*

$$T^\omega_\alpha T^\omega_\beta=T^\omega_{\alpha+\beta};\ \ \forall\alpha,\beta\in\Gamma. \tag{2.17}$$

2.2.1 Transformation de Bloch-Floquet magnétique

Dans cette section, on démontre comment l'hamiltonien P_0 peut se transformer en une forme convenable pour l'espace adiabatique. En effet on utilise le fait que l'opérateur P_0 est invariant par translations magnétiques. Cette méthode est une technique connue appelée "théorie de Bloch" par les physiciens, ou bien théorie de Floquet voir ([43]), on renvoie également le lecteur à des résultats généraux sur la théorie de Floquet.

La transformation que nous allons utiliser est appelée "transformation de Bloch-Floquet magnétique" même si elle est parfois aussi appelé "transformation de Zak" en raison de [63]. On définit la transformation de Bloch-Floquet magnétique pour toutes fonctions $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par :

$$(\mathcal{U}\psi)(y,k) := \sum_{\alpha\in\Gamma} e^{i(y-\alpha).k} T_\alpha^\omega \psi(y) = \sum_{\alpha\in\Gamma} e^{i(y-\alpha).k} e^{i\langle \frac{\omega\times y}{2},\alpha\rangle}\psi(y-\alpha), \quad (y,k)\in\mathbb{R}^{2n}. \tag{2.18}$$

Lemme 2.10 *Pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a*

- $(\mathcal{U}\psi)(y,k+\alpha^*) = e^{iy\alpha^*}(\mathcal{U}\psi)(y,k), \ \ \forall\alpha^*\in\Gamma^*$ *et*
- $(T_\alpha^\omega\mathcal{U}\psi)(y,k) = (\mathcal{U}\psi)(y,k)$, *pour tout* $\alpha\in\Gamma$.

Preuve. Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}\psi)(y,k+\alpha^*) &= \sum_{\alpha\in\Gamma} e^{i(y-\alpha).(k+\alpha^*)} T_\alpha^\omega\psi(y)\\ &= \sum_{\alpha\in\Gamma} e^{i(y-\alpha).k} e^{i(y-\alpha).\alpha^*} T_\alpha^\omega\psi(y)\\ &= e^{iy\alpha^*}\sum_{\alpha\in\Gamma} e^{i(y-\alpha).k}\underbrace{e^{-i\alpha.\alpha^*}}_{=1} T_\alpha^\omega\psi(y)\\ &= e^{iy\alpha^*}\sum_{\alpha\in\Gamma} e^{i(y-\alpha).k} T_\alpha^\omega\psi(y) = e^{iy\alpha^*}(\mathcal{U}\psi)(y,k)\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}(T_\alpha^\omega\mathcal{U})\psi(y,k) &= T_\alpha^\omega\left(\sum_{\alpha\in\Gamma} e^{i(y-\alpha).k} T_\alpha^\omega\psi(y)\right)\\ &= e^{i\langle\frac{\omega\times y}{2},\alpha\rangle}\sum_{\alpha\in\Gamma} e^{i(y-2\alpha)k} T_\alpha^\omega\psi(y-\alpha)\\ &= e^{i\langle\frac{w\times y}{2},\alpha\rangle}\sum_{\alpha\in\Gamma} e^{i(y-2\alpha)k} e^{\langle\frac{\omega\times(y-\alpha)}{2},\alpha\rangle}\psi(y-2\alpha)\\ &= \sum_{\alpha\in\Gamma} e^{i(y-2\alpha)} e^{i\langle\omega y,\alpha\rangle}\underbrace{e^{-\frac{\alpha^2}{2}\omega i}}_{=1}\psi(y-2\alpha)\\ &= \sum_{\alpha\in\Gamma} e^{i(y-2\alpha)} e^{i\langle\omega y,\alpha\rangle}\psi(y-2\alpha)\\ &= \sum_{\alpha\in\Gamma} e^{i(y-2\alpha)} T_{2\alpha}^\omega\psi(y)\\ &= \sum_{\alpha'\in\Gamma} e^{i(y-\alpha')} T_{\alpha'}^\omega\psi(y);\ \ \alpha' = 2\alpha\\ &= (\mathcal{U}\psi)(y,k).\end{aligned} \tag{2.20}$$

□

Définition 2.11 *Soit :*

$$\mathcal{H}_\omega := \left\{\psi\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n);\ T_\alpha^\omega\psi = \psi, \forall\alpha\in\Gamma\right\}$$

est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle_{\mathcal{H}_\omega} := \int_M \overline{f(y)}g(y)dy.$$

Lemme 2.12 . *$\mathcal{U}$ se prolonge en une application unitaire*

$$\mathcal{U} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \int_{M^*}^{\oplus} \mathcal{H}_\omega dk = L^2(M^*; \mathcal{H}_\omega)$$

et son inverse est donnée par $(\mathcal{U}^{-1}\phi)(y) := \int_{M^*} e^{-ik.y}\phi(k, y)dk.$

Preuve. On peut montrer que $\mathcal{U}$ est une isométrie, en effet : soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$\begin{aligned}
||\mathcal{U}\psi||^2_{\mathcal{H}_\omega} &= \langle \mathcal{U}\psi, \mathcal{U}\psi\rangle_{\mathcal{H}_\omega} \\
&= \int_{M^*}\int_M \sum_{\alpha\in\Gamma}\sum_{\alpha'\in\Gamma} e^{i(\alpha'-\alpha)k} e^{i\langle\frac{\omega\times y}{2},\alpha-\alpha'\rangle}\overline{\psi(y-\alpha)}\psi(y-\alpha')dydk \\
&= \sum_{\alpha\in\Gamma}\sum_{\alpha'\in\Gamma}\int_M e^{i\langle\frac{w\times y}{2},\alpha-\alpha'\rangle}\overline{\psi(y-\alpha)}\psi(y-\alpha')\underbrace{\int_{M^*} e^{i(\alpha'-\alpha)k}dk}_{=\delta_{\alpha,\alpha'}} dy \qquad (2.21)\\
&= \sum_{\alpha\in\Gamma}\int_M |\psi(y-\alpha)|^2 dy = ||\psi||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

puisque $\int_{M^*} e^{i(\alpha'-\alpha)k}dk = \delta_{\alpha,\alpha'} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \alpha' \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \alpha' \end{cases}$

On va montrer que $\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}\psi = \psi$ pour tout $\psi \in \mathcal{H}_\omega$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}\psi(y) &= \int_{M^*} e^{-iky}\left(\sum_{\alpha\in\Gamma} e^{i(y-\alpha)k} T^\omega_\alpha\psi(y)\right)dk \\
&= \int_{M^*} e^{-iky}\left(\sum_{\alpha\in\Gamma} e^{i(y-\alpha)k} e^{i\langle\frac{\omega\times y}{2},\alpha\rangle}\psi(y-\alpha)\right)dk \qquad (2.22)\\
&= \sum_{\alpha\in\Gamma} T^\omega_\alpha\psi(y)\underbrace{\int_{M^*} e^{-ik\alpha}dk}_{\delta_{\alpha,0}} = \psi(y).
\end{aligned}$$

Puisque $\int_{M^*} e^{-i\alpha.k}dk = \delta_{\alpha,0} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases}$

On va montrer de la même manière que $\mathcal{U}^{-1}$ est une isométrie de $L^2(M^*; \mathcal{H}_\omega)$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, en effet :

$$\begin{aligned}
||\mathcal{U}^{-1}\psi||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{M^*} e^{iky}\psi(y,k)dk\right|^2 dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{M^*} e^{iky}T^\omega_\alpha\psi(y,k)dk\right|^2 dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{M^*} e^{iky}e^{i\langle\frac{\omega\times y}{2},\alpha\rangle}\psi(y-\alpha,k)\right|^2 dkdy \qquad (2.23)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{M^*}\left|e^{iky}\psi(y-\alpha,k)\right|^2 dkdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{M^*}\left|\psi(y,k)\right|^2 dydk = ||\psi||^2_{\mathcal{H}_\omega}.
\end{aligned}$$

Dans (2.22) et (2.23) on a utilisé le fait que $\psi(y,k) = T^{\omega}_{\alpha}\psi(y,k) = e^{i\langle \frac{\omega\times y}{2},\alpha\rangle}\psi(y-\alpha,k)$ puisque $\psi \in \mathcal{H}_\omega$. Donc $\mathcal{U}^{-1}$ est injective et par suite $\mathcal{U}$ est surjective ce qui prouve que $\mathcal{U}$ est unitaire de $\mathcal{U} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(M^*;\mathcal{H}_\omega)$.

Proposition 2.13 *L'hamiltonien* $P_0 = p^w\left(y, D_y + \frac{\omega\times y}{2}\right)$ *se transforme par la transformation de Bloch-Floquet magnétique en*

$$\mathcal{U}P_0\mathcal{U}^{-1} = \int_{M^*}^{\oplus} P_0(k)dk,$$

où,

$$P_0(k) := p^w\left(y, D_y + \frac{\omega\times y}{2} + k\right). \tag{2.24}$$

Pour k fixé, le domaine de $P_0(k)$ est $\mathcal{H}^{2m}_\omega := \left\{u \in \mathcal{H}_\omega;\ \partial^\alpha u \in \mathcal{H}_\omega,\ |\alpha| \le 2m\right\}$.

Remarque 2.14 *Dans la preuve on utilise le fait que* $e^{-i\alpha^*.y}P_0\ e^{i\alpha^*.y} = P_0(\alpha^*)$, *où* $P_0(\alpha^*) = p^\omega\left(y, D_y + \frac{\omega\times y}{2} + \alpha^*\right); \alpha^* \in M^*$, *en effet :*

$$(D_y)\left[e^{i\alpha^*.y}\psi(y,\alpha^*)\right] = \alpha^* e^{i\alpha^*.y}\psi(y,\alpha^*) + e^{i\alpha^*.y}(D_y\psi)(y,\alpha^*) = e^{i\alpha^*.y}\left(\left[D_y + \alpha^*\right]\psi\right)(y,\alpha^*)$$

ce qui implique

$$\left(D_y + \frac{\omega\times y}{2}\right)\left[e^{i\alpha^*.y}\psi(y,\alpha^*)\right] = e^{i\alpha^*.y}\left(\left[D_y + \frac{\omega\times y}{2} + \alpha^*\right]\psi\right)(y,\alpha^*).$$

Maintenant on démontre de la même manière que

$$\left(D_y + \frac{\omega\times y}{2}\right)^\alpha\left[e^{i\alpha^*.y}\psi(y,\alpha^*)\right] = e^{i\alpha^*.y}\left(\left[D_y + \frac{\omega\times y}{2} + \alpha^*\right]^\alpha\psi\right)(y,\alpha^*)$$

et par suite $e^{-i\alpha^*.y}P_0\ e^{i\alpha^*.y} = P_0(\alpha^*)$.

Preuve. On vas montrer que :

$$(\mathcal{U}P_0\psi)(y,k) = (P_0(\alpha^*))(\mathcal{U}\psi)(y,k),$$

en utilisant la définition de la transformation de Bloch-Floquet magnétique on obtient :

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}P_0\psi)(y,k) &= e^{-i\alpha^*.y}(\mathcal{U}P_0\psi)(y,k+\alpha^*)\\ &= e^{-i\alpha^*.y}\sum_{\alpha\in\Gamma} e^{i(y-\alpha).(k+\alpha^*)}\underbrace{T^\omega_\alpha P_0}_{=P_0T^\omega_\alpha}\psi(y)\\ &= e^{-i\alpha^*.y}\sum_{\alpha\in\Gamma} e^{i(y-\alpha).(k+\alpha^*)}P_0T^\omega_\alpha\psi(y)\\ &= \sum_{\alpha\in\Gamma} e^{i(y-\alpha).k}\underbrace{e^{-i\alpha^*.y}P_0e^{i\alpha^*.y}}_{=P_0(\alpha^*)}T^\omega_\alpha\psi(y)\\ &= \sum_{\alpha\in\Gamma} e^{i(y-\alpha).k}P_0(\alpha^*)T^\omega_\alpha\psi(y)\\ &= (P_0(\alpha^*))(\mathcal{U}\psi)(y,k).\end{aligned} \tag{2.25}$$

Dans (2.25) on a utilisé le fait que $(T_\alpha^\omega)^{-1}P_0T_\alpha^\omega = P_0$ et $e^{-iy.\alpha^*}P_0\ e^{iy\alpha^*} = P_0(\alpha^*)$. Une conséquence de (2.25) est :

$$\mathcal{U}P_0\mathcal{U}^{-1} = \int_{M^*}^{\oplus} P_0(k)dk. \tag{2.26}$$

L'opérateur $P_0(k)$ est un opérateur différentiel elliptique à résolvante compacte en effet l'opérateur $P_0(k) \in \mathcal{L}\Big(H^k(\mathbb{R}^n/\Gamma); L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma)\Big)$ est par suite :

$$(P_0(k)+i)^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma) \longrightarrow H^k(\mathbb{R}^n/\Gamma) \xrightarrow{\quad i \quad} L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma).$$

D'après le théorème de Rellich l'injection i est compacte et par suite $(P_0(k)+i)^{-1}$ est compact de $L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma)$, d'après un résultat pour les opérateurs elliptiques (voir [53, théorème XIII.64]) le spectre de $P_0(k)$ est discret et constitué d'une suite de valeurs propres

$$E_1(k) \leqslant E_2(k) \leqslant E_3(k) \leqslant \ldots\ldots \leqslant E_{2n}(k) \leqslant E_{2n+1}(k) \leqslant \ldots\ldots$$

$$E_n(k) \longrightarrow +\infty, \ \ (n \longrightarrow +\infty).$$

D'après la théorie de perturbation $E_n(k)$ est continue en k pour n fixé et les intervalles $\Lambda_n = E_n(M^*)$ sont appelées les bandes magnétiques de Bloch. En utilisant (2.26), on obtient :

$$\sigma(P_0) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Lambda_k \quad \textit{avec} \quad \Lambda_k = E_k(\mathbb{R}^n/\Gamma^*).$$

Lemme 2.15 ([*53*])**.** *Si $E_n(k)$ est une valeur propre simple de $P_0(k)$, c'est-à-dire*

$$E_{n-1}(k) < E_n(k) < E_{n+1}(k) \tag{2.27}$$

alors $E_n(k)$ est une fonction continue pour tout $k \in \mathbb{R}^n$, de plus elle est analytique dans un voisinage de k.

Lemme 2.16 *Sous l'hypothèse $\langle \omega, \Gamma \times \Gamma \rangle \in (2\pi\mathbb{Z})^n$ on a*

$$\sigma\Big(p^w\Big(y, D_y + \frac{\omega \times y}{2}\Big)\Big) = \sigma_{ess}\Big(p^w\Big(y, D_y + \frac{\omega \times y}{2}\Big)\Big) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Lambda_k \ \textit{ avec } \ \Lambda_k = \Big\{\lambda_k(\xi);\ \xi \in \mathbb{R}^n/\Gamma^*\Big\}.$$

Ici $(\lambda_k(\xi))_{k\geq 1}$ désignent les valeurs propres de l'opérateur $p^w\Big(y, D_y + \frac{\omega \times y}{2} + \xi\Big)$ comme opérateur de $L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma)$.

Chapitre III

Rappel sur l'hamiltonien effectif pour des perturbations d'opérateurs périodiques

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques résultats sur l'hamiltonien effectif pour des perturbations des opérateurs périodiques. Pour les détails et les démonstrations on renvoie à [23], voir aussi [18, chapitre 13]. Le résultat le plus important de ce chapitre est le corollaire 2.5 qui imlique que l'étude spectrale des opérateurs du type (1.3) se réduit à l'étude des opérateurs h-pseudo-différentiels.

Tout d'abord, nous rappelons brièvement les étapes de la construction de l'hamiltonien effectif. Rappelons que nous étudions des opérateurs de la forme $P^w(hy, y, D_y)$.

1. Première étape : séparation des variables y et hy :

Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, il est clair que

$$\Big[P^w(hy, y, D_y)u(y)\Big] \otimes \delta(x - hy) = P^w(x, y, hD_x + D_y)\Big[u(y) \times \delta(x - hy)\Big]. \tag{0.1}$$

En utilisant la périodicité du symbole $P(x, y, \eta)$ par rapport à la variable y et en utilisant la théorie de Floquet (voir chapitre II), on montre que l'étude spectrale de $P^w(hy, y, D_y)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ est équivalent à l'étude spectrale de $P^w(x, y, hD_x + D_y)$ sur un sous-espace convenable de $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{2n})$ (voir proposition 1.5). Notons que l'importance de travailler avec l'opérateur $P^w(x, y, hD_x + D_y)$ est due au fait que ce dernier est un opérateur h-pseudo-différentiel par rapport à la variable x.

2. Deuxième étape : réduction de l'étude du symbole par rapport à la variable de périodicité :

Le symbole associé à l'opérateur $P^w(x, y, hD_x + D_y)$ par rapport à la variable x est

$$\widetilde{P}(x, \xi) = P^w(x, y, \xi + D_y) : L^2(\mathbb{R}^n_y/\Gamma) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n_y/\Gamma).$$

Donc c'est un symbole à valeur opérateur. Pour chaque (x, ξ) fixé le spectre de l'opérateur $\widetilde{P}(x, \xi)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n_y/\Gamma)$ est discret et est formé par des valeurs propres $\mu_1(x, \xi), \mu_2(x, \xi), ...$ avec $\lim_{k\to\infty} \mu_k(x, \xi) = +\infty$. En particulier près d'un niveau d'énergie fixé, z, $\widetilde{P}(x, \xi) - z$ est inversible si et seulement $\mu_k(x, \xi) - z \neq 0$, pour $k = 1, 2, \cdots, N$ (avec N dépend de z). Cela nous permet à l'aide d'un problème de Grushin (voir proposition 1.6) de construire une matrice $E_{-+,0}(x, \xi, z)$, C^∞ par rapport à la variable (x, ξ) et uniformément bornée ainsi que toutes ses dérivées pour z dans un compact de $\mathbb{C}$ et vérifiant :

$$\det E_{-+,0}(x,\xi,z) = 0 \text{ ssi } \ z \in \sigma(\widetilde{P}(x,\xi)). \tag{0.2}$$

Ce symbole joue un rôle important dans les démonstrations puisqu'il sera le symbole principal de l'hamiltonien effectif (voir proposition 1.7).

3. Troisième étape : réduction de l'étude spectrale de l'opérateur $P^w(hy, y, D_y)$ à celui d'un système d'opérateur h-pseudo-différentiel :

Dans l'étape précédente nous avons construit un problème de Grushin associé au symbole, maintenant en quantifiant ce symbole et en utilisant la théorie des opérateurs h-pseudo-différentiel et surtout la caractérisation de Beal's (voir théorème 1.10 du chapitre II) nous construisons à l'aide d'un problème de Grushin associé à l'opérateur $P^w(hy, y, D_y)$ un symbole $E_{-+}(x,\xi,z;h) = E_{-+,0}(x,\xi,z) + hE_{-+,1}(x,\xi,z) + \cdots$ tel que

$$z \in \sigma(P^w(hy,y,D_y)) \ \text{ ssi } E^w_{-+}(x, hD_x, z; h) \text{ n'est pas inversible.}$$

Voir corollaire 2.5. On appelle $E^w_{-+}(x, hD_x, z; h)$ Hamiltonien effectif.

□

1 Opérateur P_0 et première réduction

1.1 Classe de Symboles à valeurs opérateurs

Rappelons d'abord quelques résultats sur les opérateurs h-pseudo-différentiels à valeurs opérateur ; pour plus de détails on renvoie à Balazard-Konlein [4]. On considère une famille d'espaces hilbertiens $\mathcal{A}_X, X = (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, vérifiant :

$$\mathcal{A}_X = \mathcal{A}_Y \textit{ comme espace vectoriel } \forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{1.1}$$

$$\textit{il existe } N_0 \geq 0 \text{ , } \textit{et } C \geq 0 \textit{ tel que :} \tag{1.2}$$

$$||u||_{\mathcal{A}_X} \leqslant C\langle X - Y\rangle^{N_0} ||u||_{\mathcal{A}_Y}, \forall\, u \in \mathcal{A}_0, X, Y \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Ici $\langle X\rangle = (1 + |X|^2)^{1/2}$.

Soit $\mathcal{B}_X, X \in \mathbb{R}^{2n}$ une seconde famille vérifiant (1.1), (1.2). On dit que $p \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}(\mathcal{A}_X, \mathcal{B}_X))$ ssi $p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0))$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$, il existe C_α tel que :

$$||\partial^\alpha_X p||_{\mathcal{L}(\mathcal{A}_X, \mathcal{B}_X)} \leqslant C_\alpha, \ \forall X \in \mathbb{R}^{2n}.$$

On peut associer à p l'opérateur $p^w(x, hD_x)$, et on a

Proposition 1.1 *Soit* $p \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}; \mathcal{L}(\mathcal{A}_X, \mathcal{B}_X))$, *où* $\mathcal{A}_X, \mathcal{B}_X$ *vérifiant* (1.1), (1.2). *Alors l'opérateur* $Op_h^w(p) := p^w(x, hD_x) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathcal{A}_0) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathcal{B}_0)$ *est uniformément continu.*

Proposition 1.2 (Calderon-Vaillancourt) *Supposons que* $\mathcal{A}_X = \mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_0$, $\forall X \in \mathbb{R}^{2n}$. *Si* $p \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0))$ $(i.e ||\partial_X^\alpha p||_{\mathcal{L}(\mathcal{A}_0,\mathcal{B}_0)} \leqslant C_\alpha, \forall X \in \mathbb{R}^{2n})$, *alors*

$$Op_h^w(p) : L^2(\mathbb{R}^n; \mathcal{A}_0) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n; \mathcal{B}_0)$$

est uniformément borné.

Soit $\mathcal{C}_X, X \in \mathbb{R}^{2n}$, *une troisième famille possédant les propriétés* (1.1), (1.2).

Proposition 1.3 (Composition des opérateurs) *Soit* $p \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_X, \mathcal{C}_X))$, $q \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}(\mathcal{A}_X, \mathcal{B}_X))$ *alors il existe* $r \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}(\mathcal{A}_X, \mathcal{C}_X))$ *tel que* $Op_h^w(p) \circ Op_h^w(q) = Op_h^w(r)$, *où* r *est donné par*

$$r = exp\Big(\frac{ih}{2}\sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta)\Big)(p(x,\xi)q(y,\eta))\Big|_{x=y,\xi=\eta},$$

qu'on peut écrire

$$r \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\Big(\frac{ih}{2}\sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta)\Big)^k p(x,\xi)q(y,\eta)\Big|_{x=y,\xi=\eta} ,$$

où σ *est la deuxième forme symplectique.*

□

1.2 Opérateur $P_0 = P^w(hy, y, D_y + A(hy))$

Soit $(x, y, \eta) \to P(x, y, \eta)$ une fonction C^∞, à valeurs réelles vérifiant les hypothèses suivantes :

$(\mathbf{H_1})$ Soit $P(x, y, \eta) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x, y)\eta^\alpha$,

$(\mathbf{H_2})$ $a_\alpha(x, y) = a_\alpha(x, y + \gamma); \forall |\alpha| \leqslant m, \forall \gamma \in \Gamma$, où Γ est un réseau $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbb{Z}e_i$ avec $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

$(\mathbf{H_3})$ $|\partial_x^\gamma \partial_y^\beta a_\alpha(x, y)| \leqslant C_{\alpha,\beta,\gamma}, \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant m$.

$(\mathbf{H_4})$ $p_m(x, y, \eta) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, y)\eta^\alpha \geqslant \frac{1}{C_0}|\eta|^m$ pour tout $C_0 > 0$.

Soit $A(x) = (A_1(x), A_2(x), ..., A_n(x)) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. On suppose que

$(\mathbf{H_5})$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \backslash \{0\}$ il existe C_α tel que $|\partial_x^\alpha A(x)| \leqslant C_\alpha$.

Nous utilisons dans la suite la quantification de Weyl (voir chapitre II). Donc, on associe au symbole $P(x,y,\eta)$ l'hamiltonien quantique :

$$P_0 = P^w(hy, y, D_y + A(hy)). \tag{1.3}$$

Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit :

$$H_A^m := \Big\{u \in L^2(\mathbb{R}^n); (D_y + A(hy))^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n), \forall |\alpha| \leqslant m\Big\},$$

muni de la norme

$$\Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \|(D_y + A(hy))^\alpha u\|^2\Big)^{1/2}.$$

En utilisant des inégalités d'énergie standard on montre que

Proposition 1.4 ([*23*], *proposition A.2*) *L'opérateur* $P_0 : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ *est essentiellement autoadjoint sur* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *de domaine* H_A^m.

1.3 Réduction à un problème à deux variables séparées y et $x = hy$

Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit :

$$L_0 = \Big\{\sum_{\gamma\in\Gamma} v(x)\delta(x - hy + h\gamma); v \in L^2(\mathbb{R}_x^n)\Big\},$$

$$L_m = \Big\{\sum_{\gamma\in\Gamma} v(x)\delta(x - hy + h\gamma); (hD_x + A(x))^\alpha v \in L^2(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leqslant m\Big\},$$

muni de la norme

$$h^{-n/2}\Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \|(hD_x + A(x))^\alpha v(\frac{x}{h})\|^2\Big)^{1/2}.$$

En utilisant la transformation de Bloch-Floquet et l'égalité (0.1), on montre que :

Proposition 1.5 ([*23*], *proposition 1.3*) *L'opérateur* $P_0 = P^w(hy, y, D_y + A(hy))$ *défini sur* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *de domaine* H_A^m *est unitairement équivalent à* $P = P^w(x, y, hD_x + D_y + A(x))$ *défini sur* L_0 *de domaine* L_m.

Maintenant, nous expliquons comment on peut voir $P = P^w(x, y, hD_x + D_y + A(x))$ comme un opérateur h-pseudo-différentiel à valeur opérateur. On note par

$$K_0 = L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma),$$

$$K_{m,\xi} = \Big\{u \in K_0;\ \ (D_y + \xi)^\alpha u \in K_0,\ \ \forall |\alpha| \leqslant m\Big\}.$$

Remarquons ici, que simplement la norme de $K_{m,\xi}$ dépend de ξ ; c'est-à-dire que $K_{m,\xi}$ comme espace vectoriel est indépendant de ξ, et en utilisant l'hypothèse ($\mathbf{H_5}$) on obtient :

$$||u||_{K_{m,\xi+A(x)}} \leqslant C\Big(\langle\xi - \zeta\rangle + \langle x - z\rangle\Big)^m ||u||_{K_{m,\zeta+A(x)}} \tag{1.4}$$

$$\forall u \in K_{m,0}, (x, z, \xi, \zeta) \in \mathbb{R}^{4n},$$

$$\left\| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta P(x, \xi + A(x)) \right\|_{\mathcal{L}(K_{m,\xi+A(x)}, K_0)} \leqslant C_{\alpha,\beta}. \tag{1.5}$$

Maintenant, en utilisant la proposition 1.5 nous pouvons considérer l'opérateur $P = P^w(x, y, hD_x + D_y + A(x)) : L_0 \to L_0$. Nous donnerons une réduction de l'étude du spectre $\sigma(P)$ de P en considérant P comme un opérateur h-pseudo-différentiel en x de symbole à valeur opérateur $P(x, \xi + A(x)) = P^w(x, y, D_y + \xi + A(x))$ définie sur $\mathcal{L}(K_{m,\xi+A(x)}, K_0)$.

1.4 Problème de Grushin

Dans ce paragraphe nous rappelons la notion de problème de Gruchin, hamiltonien effectif et leurs propriétés. Soient H_1, H_2 et H_3 trois espaces de Hilbert et soit $P \in \mathcal{L}(H_1, H_3)$. Supposons qu'il existe $R_+ \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ et $R_- \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$ tel que l'opérateur

$$\mathcal{P}(z) = \begin{pmatrix} P - z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H_1 \times H_2 \longrightarrow H_3 \times H_2$$

est bijective uniformément par rapport a $z \in \Omega$. Ici Ω est un ouvert dans $\mathbb{C}$. On note par

$$\mathcal{E}(z) = \begin{pmatrix} E(z) & E_+(z) \\ E_-(z) & E_{-+}(z) \end{pmatrix}$$

son inverse. On dit que $\mathcal{P}(z)$ est un problème de Grushin associé à $(P - z)$, et $E_{-+}(z)$ est appelé l'hamiltonien effectif. Notons les propriétés suivantes qui résultent des identités $\mathcal{E} \circ \mathcal{P} = I$ et $\mathcal{P} \circ \mathcal{E} = I$:

$$(P - z) \text{ est inversible} \quad \text{ssi} \quad E_{-+}(z) \quad \text{est inversible} \tag{1.6}$$

$$(P - z)^{-1} = E(z) - E_+(z) E_{-+}^{-1}(z) E_-(z); \ \ \textit{pour } z \in \rho(P) \tag{1.7}$$

$$E_{-+}^{-1}(z) = -R_+(P - z)^{-1} R_-, \ \ \textit{pour } z \in \rho(P). \tag{1.8}$$

D'autre part en utilisant le fait que $z \longmapsto (P - z)$ est analytique et que $R_\pm$ sont indépendants de z, on déduit que les opérateurs $E(z), E_\pm(z), E_{-+}(z)$ sont analytiques par rapport à $z \in \Omega$ et que

$$\partial_z E_{-+}(z) = E_-(z) E_+(z). \tag{1.9}$$

En général, le problème essentiel dans la construction d'un problème de Grushin c'est le choix de H_2 et la construction de $R_\pm$.

1.5 Problème de Grushin associé au symbole $P(x, \xi + A(x))$

Maintenant on va réduire à l'aide d'un problème de Grushin l'étude spectrale de l'opérateur

$$P(x, \xi + A(x)) = P^w(x, y, D_y + \xi + A(x)) : K_{m,\xi+A(x)} \longrightarrow K_0.$$

Dans toute la suite $I = [a, b]$ est un compact fixé dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.6 *([23], proposition 2.1) Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$, un voisinage complexe $\mathcal{V}$ de I, et des fonctions $\varphi_j(x, y, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}, K_{m,\xi}) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\xi)$ pour $1 \leqslant j \leqslant N$, tels que pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ et pour tout $z \in \mathcal{V}$, l'opérateur :*

$$\mathcal{P}(x, \xi, z) = \begin{pmatrix} P^w(x, y, D_y + \xi) - z & R_-(x, \xi) \\ R_+(x, \xi) & 0 \end{pmatrix} : K_{m,\xi} \times \mathbb{C}^N \longrightarrow K_0 \times \mathbb{C}^N \tag{1.10}$$

est inversible d'inverse

$$\mathcal{E}_0(x, \xi, z) = \begin{pmatrix} E^0(x, \xi, z) & E^0_+(x, \xi, z) \\ E^0_-(x, \xi, z) & E^0_{-+}(x, \xi, z) \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

uniformément borné ainsi que toutes ses dérivées en (x, ξ, z) dans $\mathcal{L}(K_0 \times \mathbb{C}^N, K_{m,\xi} \times \mathbb{C}^N)$ pour $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, z \in \mathcal{V}$. Ici $R_+(x, \xi)$ et $R_-(x, \xi)$ sont définis par : $(R_+(x, \xi)u)_j = \langle u; \varphi_j(x, \xi, .)\rangle_{\mathcal{F}_{0,0}}$ et $R_-(x, \xi)u^- = \sum_{j=1}^N u_j^- \varphi_j(x, \xi, .)$.
De plus les fonctions φ_j vérifient $(*)$,

$$(*) \qquad \begin{cases} ||\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \varphi_j(x, \xi)||_{K_{m,\xi}} \leqslant C_{\alpha,\beta}, \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \ x, \xi \in \mathbb{R}^n \\ \\ \forall \gamma^* \in \Gamma^*; \ \varphi_j(x, \xi + \gamma^*, y) = e^{-iy\gamma^*} \varphi_j(x, \xi, y) \end{cases}$$

Remarque 1.7 *1) Si on remplace ξ par $\xi + A(x)$ on obtient un problème de Grushin associé à $P(x, \xi + A(x))$.*
2) Par hypothèse l'opérateur $P(x, \xi) = P^w(x, y, D_y + \xi)$ est elliptique, comme on travaille sur une variété compacte alors le spectre de l'opérateur $P^w(x, y, D_y + \xi) : L_0 \longrightarrow L_0$ est discret. On note par $\lambda_1(x, \xi), \lambda_2(x, \xi), \cdots$ la suite de ces valeurs propres. Alors en appliquant (0.2), on obtient :

$$\det E^0_{-+}(x, \xi, z) = 0 \quad ssi \ , \exists k \geq 1; z = \lambda_k(x, \xi) \tag{1.12}$$

2 Réduction spectrale de P_0

Pour $m \in \mathbb{N}$, on introduit les espaces suivants avec leurs normes naturelles :

$$\mathcal{K}_0 = L^2(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y / \Gamma)$$

$$\mathcal{K}_m = \Big\{ u \in \mathcal{K}_0 ; (hD_x + D_y + A(x))^\alpha u \in \mathcal{K}_0 \ \forall |\alpha| \leq m \Big\}.$$

Maintenant en quantifiant les symboles $\mathcal{P}(x, \xi + A(x), z)$ et $\mathcal{P}(x, \xi + A(x), z)$ on obtient :

Proposition 2.1 *([23], théorème 2.3) Pour h assez petit $z \in \mathcal{V}$, l'opérateur*

$$\mathcal{P}^w(x, hD_x + A(x), z) : \mathcal{K}_m \longrightarrow \mathcal{K}_0$$

admet un inverse uniformément borné $\mathcal{E}^w(x, hD_x + A(x), z; h)$ où $\mathcal{E}(x, \xi, z; h)$ appartient à $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}(K_0 \times \mathbb{C}^N, K_{2m,\xi} \times \mathbb{C}^N))$ qui admet un développement asymptotique en h.

$$\mathcal{E}(x, \xi, z; h) := \begin{pmatrix} E(x, \xi, z; h) & E_+(x, \xi, z; h) \\ E_-(x, \xi, z; h) & E_{-+}(x, \xi, z; h) \end{pmatrix} \sim \sum_{j=0}^{+\infty} h^j \mathcal{E}_j(x, \xi, z), \tag{2.1}$$

où $\mathcal{E}_0(x, \xi, z)$ est donné par la proposition 1.6. De plus $E_{-+}(x, \xi, z; h)$ est Γ^*-périodique en ξ et

$$E_{-+}(x, \xi + A(x), z; h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} h^j E_{-+}^j(x, \xi + A(x), z), \tag{2.2}$$

dans $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^N))$.

Soit $u = \sum_{\gamma \in \Gamma} v(x) \delta(x - hy - h\gamma) \in L_0$. En remarquant que

$$u = \sum_{\gamma \in \Gamma} v(x) \delta(x - hy - h\gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} v(hy - h\gamma) \delta(x - hy - h\gamma),$$

alors on peut identifier L_0 à un sous-espace de $S'(\mathbb{R}^n_x; L^2(\mathbb{R}^n_y/\Gamma))$. Maintenant si on introduit

$$V_0 := \Big\{ \sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma \delta(x - h\gamma); \sum_{\gamma \in \Gamma} |c_\gamma|^2 < \infty \Big\},$$

et si on applique le résultat précédent à des espaces convenables on obtient :

Théorème 2.2 *([23], théorème 3.7) Sous les hypothèses $(\mathbf{H_1}), ..., (\mathbf{H_5})$ et pour $h > 0$ assez petit et $z \in \mathcal{V}$, $\mathcal{P}^w(x, hD_x + A(x), z)$ est uniformément borné de $L_m \times (V_0)^N$ à valeurs dans $L_0 \times (V_0)^N$ et admet un inverse uniformément borné $\mathcal{E}^w(x, hD_x + A(x), z, h)$ de $L_0 \times (V_0)^N$ à valeurs dans $L_m \times (V_0)^N$.*

Remarque 2.3 *Il est clair que V_0 est unitairement équivalent à l'espace $L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma)$. Mais pour utiliser le calcul h-pseudo-différentiel global il est plus utile de travailler avec l'espace V_0.*

En appliquant (1.6), on obtient :

Corollaire 2.4 *Pour $z \in \mathcal{V}$ et $h > 0$ assez petit, on a*

$$z \in \sigma\Big(P_0\Big) \text{ si et seulement si } 0 \in \sigma\Big(E_{-+}^w(x, hD_x + A(x), z; h)\Big),$$

où $P_0 = P^w(hy, y, D_y + A(hy)) : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ et $E_{-+}^w(x, hD_x + A(x), z; h) : V_0^N \longrightarrow V_0^N$.

Si on identifie V_0^N à $l^2(\Gamma; \mathbb{C}^N)$, on obtient :

Corollaire 2.5 ([*23*], *corollaire 3.10*) *Pour* $z \in \mathcal{V}$ *et* h *assez petit, l'opérateur*

$\begin{pmatrix} P^w(hy, y, D_y + A(hy)) - \lambda & \widehat{R}_- \\ \widehat{R}_+ & 0 \end{pmatrix}$ *:* $H_{m,A} \times l^2(\Gamma; \mathbb{C}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \times l^2(\Gamma; \mathbb{C}^N)$ *est uniformément borné, bijectif d'inverse* $\begin{pmatrix} \widehat{E} & \widehat{E}_+ \\ \widehat{E}_- & \widehat{E}_{-+} \end{pmatrix}$*. Ici la matrice associée à* $\widehat{E}_{-+}$ *est égale à la matrice de* $E^w_{-+}(x, hD_x + A(x), \lambda, h)$ *définie sur* V_0^N*.*

Chapitre IV

Formule de trace pour des perturbations semi-classiques des opérateurs différentiels elliptiques à coefficients périodiques

1 Préliminaires et résultats

Soient $p(y,\xi),\ \widetilde{p}(y,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$, deux symboles Γ-périodiques en y où $\Gamma = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbb{Z}e_i$ est un réseau et les $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ forment une base de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $p(y,\xi), \widetilde{p}(y,\xi)$ vérifient :

($\mathbf{H_1}$) $p(y,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant 2m}\ a_\alpha(y)\xi^\alpha,\ \ \widetilde{p}(y,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant 2m}\ \widetilde{a}_\alpha(y)\xi^\alpha.$

($\mathbf{H_2}$) $\exists C_0 > 0$ tel que :

$$p_{2m}(y,\xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(y)\xi^\alpha \geq \frac{1}{C_0}|\xi|^{2m}. \tag{1.1}$$

($\mathbf{H_3}$) La fonction $\varphi(x)$ est à valeurs réelles, bornée ainsi que toutes ses dérivées et tend vers zéro quand $|x|$ tend vers l'infini.

($\mathbf{H_4}$) Il existe $C > 0$ tel que :

$$p_{2m}(y,\xi) + \varphi(x)\widetilde{p}_{2m}(y,\xi) \geq \frac{1}{C}|\xi|^{2m}. \tag{1.2}$$

Soit $A(x) = (A_1(x), .., A_n(x)) \in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ tels que :

($\mathbf{H_5}$) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n\backslash\{0\}$ il existe C_α tel que $|\partial_x^\alpha A_i(x)| \leqslant C_\alpha$.

Soit $\psi(x,y;h) \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}), \Gamma-$périodique en y tel que :

($\mathbf{H_6}$) La fonction $\psi(x,y;h) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}\times]0,h_0[;\mathbb{R})$; bornée ainsi que toutes ses dérivées, $\Gamma-$périodique par rapport à y et

$$\lim_{|x|\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^n, h\in]0,h_0]} \psi(x,y;h) = 0.$$

De plus on suppose que ψ admet un développement asymptotique par rapport à h, c'est-à-dire

$$\psi(x,y;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} \psi_j(x,y)h^j \ \ dans \ \ \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}).$$

On pose

$$P(x,y,\xi;h) = p(y,\xi) + \varphi(x)\widetilde{p}(y,\xi) + \psi(x,y;h)$$

et

$$P_0(x,y,\xi) = p(y,\xi) + \varphi(x)\widetilde{p}(y,\xi) + \psi_0(x,y).$$

On s'intéresse à l'étude du spectre de l'opérateur :

$$\begin{aligned} P &= p^w\Big(y, D_y + A(hy)\Big) + \Big(\varphi(hy)\widetilde{p}(y, D_y + A(hy))\Big)^w + \psi(hy,y;h) \\ &= P^w\Big(hy, y, D_y + A(hy); h\Big);\ pour\ h\ assez\ petit. \end{aligned} \tag{1.3}$$

On définit le réseau dual Γ^* par :

$$\Gamma^* := \Big\{\gamma^* \in \mathbb{R}^n; e^{i\langle\gamma,\gamma^*\rangle} = 1, \forall\gamma\in\Gamma\Big\}.$$

E (respectivement E^*), un domaine fondamental borné du réseau Γ (respectivement Γ^*).

$$V_0 = \Big\{u \in S'(\mathbb{R}^n)\ tel\ que\ u(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma \delta(x - h\gamma)\ où\ (f_\gamma)_\gamma \in l^2(\Gamma,\mathbb{C})\Big\}.$$

On note par :

$H_\xi = \Big\{u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n); u(y+\gamma) = e^{i\langle\gamma,\xi\rangle}u(y), \forall\gamma\in\Gamma\Big\},$

$H_{m,\xi} = \Big\{u \in H_\xi; \partial_y^\alpha u(y) \in H_\xi, \forall|\alpha| \leqslant m\Big\},$

$K_0 = H_0 = L^2\Big(\mathbb{R}^n/\Gamma\Big),$

$K_{m,\xi} = \Big\{u \in K_0; (D_y+\xi)^\alpha u \in K_0, \forall|\alpha| \leqslant m\Big\}.$

On considère l'opérateur de Schrödinger $p^w(y,D_y)$ sur $\mathbb{R}^n$, on note par P_ξ l'opérateur autoadjoint non borné sur H_ξ associé à $p^w(y,D_y)$, $(\lambda_k(\xi))_{k\geq 1}$ les valeurs propres de P_ξ comptées avec leurs multiplicités que l'on range par ordre croissant, d'après la théorie de Floquet ;

$$\sigma\Big(p^w(y,D_y)\Big) = \sigma_{ess}\Big(p^w(y,D_y)\Big) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} J_k \quad avec \quad J_k = \lambda_k(\mathbb{R}^n/\Gamma^*). \tag{1.4}$$

On rappelle que $\sigma_{ess}(A)$, le spectre essentiel de A est donné par $\sigma_{ess}(A) = \sigma(A)/\sigma_{disc}(A)$, où $\sigma_{disc}(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A isolées de multiplicité finie.

Lemme 1.1

$$\sigma_{ess}\Big(P^w(hy, y, D_y; h)\Big) = \sigma_{ess}\Big(p^w(y, D_y)\Big) = \sigma\Big(p^w(y, D_y)\Big).$$

Preuve. D'après l'identité de la résolvante, on a :

$$\Big(i + P^w(hy, y, D_y; h)\Big)^{-1} - \Big(i + p^w(y, D_y)\Big)^{-1} = \tag{1.5}$$

$$\Big(i + p^w(y, D_y)\Big)^{-1}\Big(P^w(hy, y, D_y; h) - p^w(y, D_y)\Big)\Big(i + P^w(hy, y, D_y; h)\Big)^{-1} =$$

$$\Big(i + p^w(y, D_y)\Big)^{-1} G^w(hy, y, D_y)\Big(i + P^w(hy, y, D_y; h)\Big)^{-1},$$

avec $G(x, y, \xi) = \varphi(x)\widetilde{p}(y, \xi) + \psi(x, y; h)$. Comme $\widetilde{p}^w(y, D_y)$ est un opérateur différentiel d'ordre inférieur ou égal à $2m$ et à coefficients C^∞, alors on peut écrire $G^w(hy, y, D_y)$ sous la forme suivante

$$G^w(hy, y, D_y) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} c_\alpha(hy, y, h) D_y^\alpha,$$

avec $\lim_{|y|\to\infty} c_\alpha(hy, y, h) = 0$. Montrons que pour tout $|\alpha| \leq 2m$, l'opérateur

$$\Big(i + p^w(y, D_y)\Big)^{-1} c_\alpha(hy, y, h) D_y^\alpha \Big(i + P^w(hy, y, D_y; h)\Big)^{-1},$$

est compact. Comme

$$\Big(i + P^w(hy, y, D_y; h)\Big)^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{2m}(\mathbb{R}^n)$$

et

$$D_y^\alpha : H^{2m}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

sont bornés, alors $D_y^\alpha\Big(i + P^w(hy, y, D_y; h)\Big)^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ est borné. On rappelle que $H^{2m}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); (D_y)^\alpha u(y) \in L^2(\mathbb{R}^n), \forall |\alpha| \leqslant 2m\}$ est l'espace de Sobolev d'ordre $2m$.

Par conséquent il suffit de montrer que $\Big(i + p^w(y, D_y)\Big)^{-1} c_\alpha(hy, y, h)$ est compact. Rappelons qu'un opérateur linéaire A borné d'un espace de Hilbert H dans H est compact si et seulement si son adjoint est compact. Donc il suffit de montrer que $c_\alpha(hy, y, h)\Big(p^w(y, D_y) - i\Big)^{-1}$ est compact. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; [0, 1])$ tel que $\phi(y) = 1$ pour $|y| < 1$ et support de ϕ est inclus dans la boule de centre 0 et de rayon 2. Pour $R > 0$, on pose $\phi_R(y) = \phi(y/R)$ et K_R la boule unité fermée de centre 0 et de rayon $2R$. Soit $H^{2m}_{K_R} = \{u \in H^{2m}(\mathbb{R}^n);\ \operatorname{supp} u \subset K_R\}$. Comme $\Big(p^w(y, D_y) - i\Big)^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{2m}(\mathbb{R}^n)$ et $c_\alpha \phi_R : H^{2m}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{2m}_{K_R}$ sont bornés et l'injection $i : H^{2m}_{K_R} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ est compacte alors $\phi_R c_\alpha\Big(p^w(y, D_y) - i\Big)^{-1}$ est compacte. D'autre part, comme

$$\Big\|\phi_R c_\alpha - c_\alpha\Big\|_\infty = \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\Big|(\phi_R(y) - 1)c_\alpha(hy, y, h)\Big| \leq \sup_{|y|>R}\Big|c_\alpha(hy, y, h)\Big| \longrightarrow 0,$$

lorsque R tend vers $+\infty$, alors

$$\left\|\Big(\phi_R c_\alpha - c_\alpha\Big)\Big(p^w(y,D_y)-i\Big)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n),L^2(\mathbb{R}^n))} \longrightarrow 0, \text{ lorsque } R \to +\infty.$$

Par conséquent l'opérateur $c_\alpha\Big(p^w(y,D_y)-i\Big)^{-1}$ est compact. Ceci termine la démonstration du lemme.

□

La proposition suivante sera démontrée dans la sous section 2.2 (formule de trace via l'hamiltonien effectif).

Proposition 1.2 *Soit I un intervalle fermé disjoint du spectre de $p^w(y,D_y)$. Alors, il existe $h_0>0$ assez petit tel que :*

$$I \cap \sigma\Big(p^w\Big(y, D_y + A(hy)\Big)\Big) = \emptyset, \tag{1.6}$$

pour tout $h \in]0,h_0[$.

Fixons $\alpha < \beta$ tel que :

$$[\alpha,\beta] \cap \sigma\Big(p^w(y,D_y)\Big) = \emptyset. \tag{1.7}$$

D'après le lemme 1.1 et la proposition 1.2 on a :

$$[\alpha,\beta] \cap \sigma_{ess}\Big(P^w\Big(hy, y, D_y + A(hy); h\Big)\Big) = \emptyset, \; pour\, h\, assez\, petit. \tag{1.8}$$

Donc la perturbation crée des valeurs propres isolées et de multiplicités finies dans l'intervalle $[\alpha,\beta]$.

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section.

Théorème 1.3 *Sous les hypothèses $((\mathbf{H_1})-(\mathbf{H_6}))$ et si α,β vérifient (1.7), alors pour $f \in C_0^\infty((\alpha,\beta);\mathbb{R})$ il existe une suite de nombres réels $(a_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ telle que*

$$tr\Big[f(P^w(hy,y,D_y+A(hy);h))\Big] \sim h^{-n}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f)h^k \qquad (h \searrow 0), \tag{1.9}$$

avec

$$a_0(f) = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\geq 1}\int\int_{\mathbb{R}^n_x\times E^*} f\Big(\mu_k(x,\xi)\Big)dxd\xi.$$

Si on suppose que

$$p(y,\xi) = \widetilde{p}(y,\xi) \;\; et \;\; \psi_0(x,y) := \psi_0(x) \; est\; indépendant\; de\; y, \tag{$\mathcal{R}$}$$

alors ;

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\geq 1}\int\int_{\mathbb{R}^n_x\times E^*} f\Big((1+\varphi(x))\lambda_k(\xi)+\psi_0(x)\Big)dxd\xi \\ &= \int\int_{\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}_t} f\Big((1+\varphi(x))t+\psi_0(x)\Big)d\rho(t)dx. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Ici $\mu_k(x,\xi)$ sont les valeurs propres de l'opérateur $P_0^w(x,y,D_y+\xi)$ de $L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma)$ et $\rho(t)$, désigne la densité d'états associée à l'opérateur $p^w(y,D_y)$.

2 Hamiltonien effectif

Dans cette section, nous appliquons la méthode de l'hamiltonien effectif (chapitre précédent) à notre opérateur $P^w(hy,y,D_y+A(hy);h)$.

2.1 Hamiltonien effectif

Pour (x,ξ) fixé on note $P(x,\xi) = P_0^w(x,y,D_y+\xi)$, (on rappelle que $P_0(x,y,\xi) = p(y,\xi) + \varphi(x)\widetilde{p}(y,\xi) + \psi_0(x,y)$). Si on considère $P(x,\xi)$ comme élément de $\mathcal{L}(K_{2m,\xi};K_0)$ on a :

$$\left\|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta P(x,\xi+A(x))\right\|_{\mathcal{L}(K_{2m,\xi+A(x)};K_0)} \leqslant C_{\alpha,\beta}, \tag{2.1}$$

pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$.

La proposition 1.6 du chapitre précédent implique :

Proposition 2.1 *Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$, un voisinage complexe $\mathcal{V}$ de $[\alpha,\beta]$, et des fonctions $\varphi_j(x,y,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}, K_{2m,0}) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi \times \mathbb{R}^n_y)$ pour $1 \leqslant j \leqslant N$, tels que pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ et pour tout $z \in \mathcal{V}$, l'opérateur :*

$$\mathcal{P}_0(x,\xi,z) := \begin{pmatrix} (P_0^w(x,y,D_y+\xi)-z) & R_-(x,\xi) \\ R_+(x,\xi) & 0 \end{pmatrix} : K_{2m,\xi} \times \mathbb{C}^N \longrightarrow K_0 \times \mathbb{C}^N, \tag{2.2}$$

vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\mathcal{P}_0$ est bijectif, uniformément borné ainsi que toutes ses dérivées en x,ξ,z.

(ii) $\mathcal{P}_0(x,\xi,z) \in \mathcal{S}^0\Big(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}\Big(K_{2m,\xi} \times \mathbb{C}^N, K_0 \times \mathbb{C}^N\Big)\Big)$.

(iii) L'inverse $\mathcal{E}_0(x,\xi,z) = \begin{pmatrix} E^0(x,\xi,z) & E_+^0(x,\xi,z) \\ E_-^0(x,\xi,z) & E_{-+}^0(x,\xi,z) \end{pmatrix} : K_0 \times \mathbb{C}^N \longrightarrow K_{2m,\xi} \times \mathbb{C}^N$ de $\mathcal{P}_0(x,\xi,z)$ vérifie (i) et appartient à $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}(K_0 \times \mathbb{C}^N, K_{2m,\xi} \times \mathbb{C}^N))$.

Ici les opérateurs R_- et R_+ sont définis par :

$$(R_+(x,\xi)u)_j = \Big\langle u, \varphi_j(x,\xi)\Big\rangle_{K_0}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant N \tag{2.3}$$

$$R_-(x,\xi)u^- = \sum_{j=1}^N u_j^- \varphi_j(x,.,\xi)$$

$u^- = (u_1^-, u_2^-, .., u_N^-) \in \mathbb{C}^N$. *De plus les fonctions* φ_j *vérifient :*

$$\begin{cases} ||\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \varphi_j||_{K_{m,\xi}} \leqslant C_{\alpha,\beta},\ \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n, x,\xi \in \mathbb{R}^n \\ \\ \forall \gamma^* \in \Gamma^*; \varphi_j(x,\xi+\gamma^*,y) = e^{-iy\gamma^*}\varphi_j(x,\xi,y). \end{cases}$$

Dans la remarque suivante nous formulons quelques propriétés sur l'hamiltonien effectif qui seront utiles par la suite.

Remarque 2.2 *a) Si la condition* ($\mathcal{R}$) (*voir théorème 1.3*) *est vérifiée, alors on peut construire les opérateurs* ($\mathcal{P}_0(x,\xi,z)$, $\mathcal{E}_0(x,\xi,z)$ *associés à* ($P_0^w(x,y,D_y+\xi)-z$) *de la manière suivante. On commence à construire un problème associé à l'opérateur* ($p^w(y,D_y)-z$) *pour* z *dans un voisinage de* $\{(\lambda-\psi_0(x))/(1+\varphi(x)); x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [\alpha,\beta]\}$. *Par la proposition 2.1 on obtient deux opérateurs* $\mathcal{P}(\xi,z), \mathcal{E}(\xi,z)$ *indépendants de* x. *Maintenant il suffit de prendre*

$$\mathcal{P}_0(x,\xi,z) = \Big(1+\varphi(x)\Big)\mathcal{P}\left(\xi, \frac{z-\psi_0(x)}{1+\varphi(x)}\right),$$

et

$$\mathcal{E}_0(x,\xi,z) = \Big(1+\varphi(x)\Big)^{-1}\mathcal{E}\left(\xi, \frac{z-\psi_0(x)}{1+\varphi(x)}\right).$$

b) En utilisant les identités $\mathcal{P}_0(x,\xi,z)\circ\mathcal{E}_0(x,\xi,z) = I, \mathcal{E}_0(x,\xi,z)\circ\mathcal{P}_0(x,\xi,z) = I$, *on obtient :*

$$\Big(P_0^w(x,y,D_y+\xi)-z\Big)E_+^0(x,\xi,z) + R_-(x,\xi)E_{-+}^0(x,\xi,z) = 0, \tag{2.4}$$

$$E^0(x,\xi,z)\Big(P_0^w(x,y,D_y+\xi)-z\Big) + E_+^0(x,\xi,z)R_+(x,\xi) = I, \tag{2.5}$$

$$E_-^0(x,\xi,z)\Big(P_0^w(x,y,D_y+\xi)-z\Big) + E_{-+}^0(x,\xi,z)R_+(x,\xi) = 0, \tag{2.6}$$

$$R_+(x,\xi)E_+^0(x,\xi,z) = I, \tag{2.7}$$

$$E_-^0(x,\xi,z)R_-(x,\xi) = I, \tag{2.8}$$

une conséquence de (2.4)-(2.8) *est :*

$$\Big(P_0^w(x,y,D_y+\xi)-z\Big)^{-1} = E^0(x,\xi,z) - E_+^0(x,\xi,z)(E_{-+}^0(x,\xi,z))^{-1}E_-^0(x,\xi,z), \tag{2.9}$$

$$E_{-+}^0(x,\xi,z)^{-1} = -R_+(x,\xi)\Big(P_0^w(x,y,D_y+\xi)-z\Big)^{-1}R_-(x,\xi). \tag{2.10}$$

D'autre part l'identité

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{E}_0(x,\xi,z) = -\mathcal{E}_0(x,\xi,z)\frac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial z}(x,\xi,z)\mathcal{E}_0(x,\xi,z)$$

et le fait que $R_+(x,\xi)$ *et* $R_-(x,\xi)$ *sont indépendants de* z*, impliquent*

$$\partial_z E^0_{-+}(x,\xi,z) = E^0_-(x,\xi,z)E^0_+(x,\xi,z). \tag{2.11}$$

Puisque $\mathcal{P}_0(x,\xi,\tau) = \mathcal{P}^*_0(x,\xi,\tau)$ *pour tout* $\tau \in \mathbb{R}$*, on déduit que* $E^0_-(x,\xi,\tau) = E^0_+(x,\xi,\tau)^*$ *et en utilisant* (2.7)*, on obtient :*

$$\partial_\tau E^0_{-+}(x,\xi,\tau) = (E^0_+(x,\xi,\tau))^* E^0_+(x,\xi,\tau) > 0. \tag{2.12}$$

De (2.9), (2.10) *il découle que :*

$$z \in \sigma\Big(P^w_0(x,y,D_y+\xi)\Big) \Longleftrightarrow det\, E^0_{-+}(x,\xi,z) = 0. \tag{2.13}$$

Comme R_+ *et* R_- *sont bornés, alors d'après* (2.10) *:*

$$\left\|E^0_{-+}(x,\xi,z)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^N,\mathbb{C}^N)} \leq C\left\|\Big(P^w_0(x,y,D_y+\xi)-z\Big)^{-1}\right\| \leq \frac{C}{|\Im(z)|};\ \ pour\ \ \Im(z)\neq 0. \tag{2.14}$$

Pour z_0 *réel :* $dim\Big(ker\, E^0_{-+}(x,z,\xi)\Big) = dim\Big(ker\,(P^w_0(x,y,D_y+\xi)-z)\Big)$*. Près d'un zéro* z_0 *de* $det\, E^0_{-+}(x,\xi,z)$ *(pour* (x,ξ) *fixé), on peut ranger les valeurs propres* $\lambda_1(z),\lambda_2(z),...,\lambda_N(z)$ *de façon à être holomorphes en* z *(voir Kato [40]), et tel que* $\lambda_1(z_0)=\lambda_2(z_0)=...=\lambda_d(z_0)=0$*, où* $d = dim\, ker E^0_{-+}$*. Puisque* $|\lambda_j(z)| \geq C'|\Im(z)|$ *on sait que* $\lambda'_j(z_0)\neq 0$ *pour* $1\leq j\leq d$*. Donc* $z\longmapsto det\, E^0_{-+}(x,\xi,z)$ *à un zéro de multiplicité* d *en* $z=z_0$*.*

c) Si $\mathcal{V}$ *est un petit voisinage complexe de* $[\alpha,\beta]$ *alors pour* $z\in\mathcal{V}$ *;*

$$P^w_0(x,y,D_y+\xi)-z = p^w\Big(y,D_y+\xi\Big)+\Big(\varphi(x)\widetilde{p}(y,D_y+\xi)\Big)^w+\psi_0(x,y)-z \tag{2.15}$$

$$= \Big(I+\Big(\varphi(x)\widetilde{p}^w(y,D_y+\xi)+\psi_0(x,y)\Big)\circ\Big(p^w(y,D_y+\xi)-z\Big)^{-1}\Big)\Big(p^w(y,D_y+\xi)-z\Big),$$

on rappelle que $[\alpha,\beta,]\cap\sigma(p^w(y,D_y))=\emptyset$*. Comme* $\varphi(x)$ *et* $\psi_0(x,y)$ *tendent vers zéro à l'infini alors on peut choisir* R *très grand tel que :*

$$\left\|\Big(\varphi(x)\widetilde{p}^w(y,D_y+\xi)+\psi_0(x,y)\Big)\circ\Big(p^w(y,D_y+\xi)-z\Big)^{-1}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \leqslant \frac{1}{2},$$

pour $|x|\geqslant 2R$*,* $\xi\in\mathbb{R}^n$*. Donc* $\Big(P^w_0(x,y,D_y+\xi)-z\Big)$ *est inversible et par suite* $z\notin\sigma\Big(P^w_0(x,y,D_y+\xi)\Big)$

pour $|x| \geqslant 2R$ *et* $\xi \in \mathbb{R}^n$. *D'après la remarque précédente on déduit que :*

$$\Big| det\, E^0_{-+}(x,\xi,z)\Big| \geqslant \eta > 0,$$

uniformément en (x,ξ,z) *dans* $\{x \in \mathbb{R}^n; |x| \geqslant 2R\} \times \mathbb{R}^n_\xi \times \mathcal{V}$.

d) On suppose que la condition $(\mathcal{R})$ *est vérifiée. On note par* $(\lambda_k(\xi))_{k\geq 1}$ *les valeurs propres de l'opérateur* $p^w(y, D_y+\xi)$ *comme opérateur non borné défini sur* $L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma)$ *alors en utilisant* (2.13) *et le fait que* $P^w_0(x,y,D_y+\xi) = (1+\varphi(x))p^w(y,D_y+\xi)+\psi_0(x)$ *on obtient :*

$$det\, E^0_{-+}(x,\xi,z) = 0 \Longleftrightarrow \exists k \geq 1 \text{ tel que } z = (1+\varphi(x))\lambda_k(\xi)+\psi_0(x). \tag{2.16}$$

□

Notons par $\mathcal{P}^w_0(x, hD_x + A(x), z)$ l'opérateur associé au symbole $\mathcal{P}_0(x,\xi+A(x),z)$ donné par la proposition 2.1, et posons

$$\mathcal{P}^w(x, hD_x+A(x), z; h) = \mathcal{P}^w_0(x, hD_x+A(x), z) + \begin{pmatrix} \sum_{j\geqslant 1}\psi_j(x,y)h^j & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Soit $\mathcal{E}_0\Big(x,\xi+A(x),z\Big)$ l'inverse de $\mathcal{P}_0\Big(x,\xi+A(x),z\Big)$ donné par la proposition 2.1. Le calcul des opérateurs h-pseudo-différentiels à valeurs opérateurs (voir chapitre III) et la proposition 2.1 impliquent que :

$$\mathcal{P}^w\Big(x, hD_x+A(x), z; h\Big) \circ \mathcal{E}^w_0\Big(x, hD_x+A(x), z\Big) = I + h\mathcal{R}^w\Big(x, hD_x+A(x), z; h\Big),$$

avec $\mathcal{R}(x,\xi,z;h) \in \mathcal{S}^0\Big(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}(K_0\times\mathbb{C}^N, K_0\times\mathbb{C}^N)\Big)$. Donc l'opérateur $\mathcal{R}^w\Big(x, hD_x+A(x), z; h\Big)$ est borné uniformément par rapport à h. Donc pour h assez petit, l'opérateur $\mathcal{P}^w\Big(x, hD_x+A(x), z; h\Big)$ est inversible. En particulier comme dans la proposition 2.1 du chapitre précédent on obtient :

Proposition 2.3 . *Pour* h *assez petit* $z \in \mathcal{V}, \mathcal{P}^w(x, hD_x+A(x), z; h)$ *admet un inverse uniformément borné* $\mathcal{E}^w(x, hD_x+A(x), z; h)$ *où* $\mathcal{E}(x,\xi,z;h)$ *appartient à* $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}(K_0\times\mathbb{C}^N, K_{2m,\xi}\times\mathbb{C}^N))$ *qui admet un développement asymptotique en* h.

$$\mathcal{E}(x,\xi,z;h) := \begin{pmatrix} E(x,\xi,z;h) & E_+(x,\xi,z;h) \\ E_-(x,\xi,z;h) & E_{-+}(x,\xi,z;h)\end{pmatrix} \sim \sum_{j=0}^{+\infty} h^j \mathcal{E}_j(x,\xi,z), \tag{2.18}$$

où $\mathcal{E}_0(x,\xi,z)$ *est donné par la proposition 2.1. De plus* $E_{-+}(x,\xi,z;h)$ *est* Γ^**-périodique en* ξ *et*

$$E_{-+}(x,\xi+A(x),z;h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} h^j E^j_{-+}(x,\xi+A(x),z), \tag{2.19}$$

dans $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}(\mathbb{C}^N,\mathbb{C}^N))$.

Remarque 2.4 *D'après la remarque 2.2 (a), si* $p(y,\xi)=\widetilde{p}(y,\xi)$ *et* $\psi_0(x,y)$ *est indépendant de* y *alors on peut choisir* $E^w_{-+}(x,hD_x+A(x),z;h)$ *de la forme*

$$E^w_{-+}(x,hD_x+A(x),z;h)=(1+\varphi(x))^{-1}\circ\widetilde{E}^w_{-+}(x,hD_x+A(x),z;h), \tag{2.20}$$

(*ici* $(1+\varphi(x))^{-1}$ *est l'opérateur de multiplication par* $(1+\varphi(x))^{-1}$) *avec*

$$\widetilde{E}^0_{-+}(x,\xi,z)=E_{-+}\left(\xi,\frac{z-\psi_0(x)}{1+\varphi(x)}\right), \tag{2.21}$$

où $E_{-+}(\xi,z)$ *est l'hamiltonien effectif associé à l'opérateur* $(p^w(y,D_y)-z)$*.*

□

D'autre part le corollaire 2.5 du chapitre précédent donne :

Corollaire 2.5 *Pour* $z\in\mathcal{V}$*, l'opérateur*

$\begin{pmatrix} P^w(hy,y,D_y+A(hy);h)-z & \widehat{R}^*_+ \\ \widehat{R}_+ & 0\end{pmatrix}$: $H_{2m,A}\times l^2(\Gamma;\mathbb{C}^N)\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)\times l^2(\Gamma;\mathbb{C}^N)$ *est uniformément borné quand* h *est très petit, bijectif d'inverse* $\begin{pmatrix}\widehat{E}(z) & \widehat{E}_+(z)\\ \widehat{E}_-(z) & \widehat{E}_{-+}(z)\end{pmatrix}$ *uniformément borné,* $\widehat{E}(z),\widehat{E}_+(z),\widehat{E}_-(z)$, $\widehat{E}_{-+}(z)$ *sont holomorphes en* z*. Si on identifie* V_0^N *à* $l^2(\Gamma;\mathbb{C}^N)$*, alors la matrice de* $\widehat{E}_{-+}$ *est égale à la matrice de* $E^w_{-+}(x,hD_x+A(x),z;h)$ *définie sur* V_0^N*.*

Remarque 2.6 *a) Identiquement à* (2.9)*,* (2.10) *et* (2.11) *on a :*

$$\Big(P^w(hy,y,D_y+A(hy);h)-z\Big)^{-1}=\widehat{E}(z)-\widehat{E}_+(z)\widehat{E}^{-1}_{-+}(z)\widehat{E}_-(z), \tag{2.22}$$

$$\widehat{E}^{-1}_{-+}(z)=-\widehat{R}_+\Big(P^w(hy,y,D_y+A(hy);h)-z\Big)^{-1}\widehat{R}^*_+ \tag{2.23}$$

et du fait que $\widehat{R}_+,\widehat{R}_-$ *sont indépendants de* z

$$\partial_z\widehat{E}_{-+}(z)=\widehat{E}_-(z)\widehat{E}_+(z) \tag{2.24}$$

b) D'après la proposition 2.3.

$$\begin{aligned}\Big(P^w(x,hD_x+A(x);h)-z\Big)^{-1}&=E^w(x,hD_x+A(x);h)-E^w_+(x,hD_x+A(x);h)\circ\\ &\quad(E^w_{-+}(x,hD_x+A(x);h))^{-1}\circ E^w_-(x,hD_x+A(x);h),\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}\Big(E^w_{-+}(x,hD_x+A(x);h)-z\Big)^{-1}&=R^w_+(x,hD_x+A(x);h)\circ\Big(P^w(x,hD_x+A(x);h)-z\Big)^{-1}\circ\\ &\quad R^w_-(x,hD_x+A(x);h),\end{aligned} \tag{2.26}$$

où on a remplacé $l^2(\Gamma, \mathbb{C}^N)$ par V_0^N.

2.2 Formule de trace via l'hamiltonien effectif

Maintenant nous allons utiliser l'hamiltonien effectif pour prouver la proposition 1.2 et le théorème 1.3.

Démonstration de la proposition1.2. Soit $\widetilde{E}_{-+}(\xi, z)$ l'hamiltonien effectif associé à $p^w(y, D_y + \xi)$. Par le corollaire 2.4 et corollaire 2.5 pour tout z dans un voisinage de I on a :

$$\left| det\widetilde{E}_{-+}(\xi, z) \right| \geq \frac{1}{C_0}.$$

Soit maintenant $\widetilde{E}^w_{-+}(x, hD_x, z; h)$ l'hamiltonien effectif correspondant à $p^w(y, D_y + A(hy))$. Par construction, le symbole principal de $\widetilde{E}_{-+}(x, \xi, z; h)$ est $\widetilde{E}_{-+}(\xi + A(x), z)$. Donc pour h assez petit et $z \in I$ l'inégalité précédente implique

$$\left| detE^0_{-+}(x, \xi, z, h) \right| \geq \frac{1}{C_1}.$$

Donc pour h assez petit et $z \in I$ l'opérateur $E^w_{-+}(x, hD_x + A(x), z; h)$ est elliptique et donc il est inversible d'après la proposition 1.5. Il résulte du corollaire 2.5 que $I \cap \sigma(p^w(y, D_y + A(hy))) = \emptyset$. Ce qui achève la démonstration de (1.6).

Début de la démonstration du théorème 1.3. D'après (1.8), on a

$$[\alpha, \beta] \cap \sigma_{ess}\Big(P^w(hy, y, D_y + A(hy); h)\Big) = \emptyset, \quad pour\, h\, assez\, petit$$

donc la perturbation crée des valeurs propres isolées et de multiplicités finies dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et pour $f \in C_0^\infty((\alpha, \beta); \mathbb{R})$, $f(P^w(hy, y, D_y + A(hy); h))$ est un opérateur à trace.

Pour $\varepsilon > 0$ vérifiant :

$$\Big([-\varepsilon, \varepsilon] + \sigma\Big(p^w(y, D_y)\Big)\Big) \cap [\alpha, \beta] = \emptyset, \tag{2.27}$$

on construit deux fonctions possédant les propriétés suivantes :

(i) $\widetilde{\varphi}(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \widetilde{\psi}_0(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n/\Gamma, \mathbb{R})$

(ii) $\widetilde{\varphi}(x), \widetilde{\psi}_0(x, y) \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ quelque soit $x, y \in \mathbb{R}^n$

(iii) $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x), \widetilde{\psi}_0(x, y) = \psi_0(x, y)$ *pour* $|x| > 2R$.

À $\widetilde{\varphi}(x), \widetilde{\psi}_0(x, y)$ on associe l'opérateur $\widetilde{P}(x, \xi) = p^w(y, D_y + \xi) + \widetilde{\varphi}(x)\widetilde{p}^w(y, D_y + \xi) + \widetilde{\psi}_0(x, y)$, (ii) entraîne :

$$\sigma(\widetilde{P}(x, \xi)) \subset \sigma(p^w(y, D_y)) + [-\varepsilon, \varepsilon] \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

En utilisant (2.27) on obtient ;

$$\sigma(\widetilde{P}(x, \xi)) \cap [\alpha, \beta] = \emptyset. \tag{2.28}$$

On désigne par $\widetilde{E}^0_{-+}(x,\xi,z)$ l'opérateur construit dans la proposition 2.1 associé à $\widetilde{P}(x,\xi)$.(2.27) et (2.28) combinés avec la remarque 2.2(b) donnent

$$\left| det\, \widetilde{E}^0_{-+}(x,\xi,z)\right| \geq \frac{1}{C_0}, \tag{2.29}$$

C_0 est indépendant de (x,ξ,z) dans $\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi} \times [\alpha,\beta]$.

De (iii) nous avons $\widetilde{P}(x,\xi) = P(x,\xi)$, *pour* $|x| > 2R$ et par suite

$$\widetilde{E}^0_{-+}(x,\xi,z) = E^0_{-+}(x,\xi,z) \ \ pour \ \ \ |x| > 2R \tag{2.30}$$

$\widetilde{E}^0_{-+}(x,\xi,z)$ est une perturbation de $E^0_{-+}(x,\xi,z)$ inversible uniformément en (x,ξ,z) dans $\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi} \times [\alpha,\beta]$.

On pose :

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_{-+}(x,\xi,z;h) &= \widetilde{E}^0_{-+}(x,\xi,z) + \Big(E_{-+}(x,\xi,z;h) - E^0_{-+}(x,\xi,z)\Big)\\ &= \widetilde{E}^0_{-+}(x,\xi,z) + \sum_{j\geq 1} h^j E^j_{-+}(x,\xi,z).\end{aligned} \tag{2.31}$$

où $E_{-+}(x,\xi,z;h)$ est donné par (2.19), il résulte alors de (2.30) et (2.31) que :

$$\widetilde{E}_{-+}(x,\xi,z;h) \in \mathcal{S}^0\Big(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}(\mathbb{C}^N,\mathbb{C}^N)\Big), \tag{2.32}$$

$$\widetilde{E}_{-+}(x,\xi,z;h) \ est\ un\ opérateur\ elliptique\ uniformément\ en\ z \in [\alpha,\beta], \tag{2.33}$$

$$\widetilde{E}_{-+}(x,\xi,z;h) = E_{-+}(x,\xi,z;h)\ pour\ |x| > 2R, \tag{2.34}$$

$$\widetilde{E}_{-+}(x,\xi,z;h)\ est\ holomorphe\ en\ z \in \mathcal{V}, \tag{2.35}$$

ici $\mathcal{V}$ est un voisinage complexe de $[\alpha,\beta]$. D'après un résultat de R.Beals (voir proposition 1.5) pour les opérateurs pseudo-différentiels traduits par Helffer-Sjöstrand [33] dans le cadre semi-classique et en utilisant (2.32), (2.33) il existe un opérateur $G^w(x, hD_x + A(x), z; h) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^N))$ holomorphe en $z \in \mathcal{V}$ tels que :

$$G(x,\xi + A(x), z; h) \in \mathcal{S}^0\Big(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}(\mathbb{C}^N,\mathbb{C}^N)\Big), \tag{2.36}$$

$$\widetilde{E}^w_{-+}(x, hD_x + A(x), z; h) \circ G^w(x, hD_x + A(x), z; h) = G^w \circ \widetilde{E}^w_{-+} = I, \tag{2.37}$$

pour h assez petit.

Remarque 2.7 *a) D'après l'identité de la résolvante pour* $\Im(z) \neq 0$, *on a*

$$\widehat{E}^{-1}_{-+}(z) = \widehat{\widetilde{E}}^{-1}_{-+}(z) - \widehat{E}^{-1}_{-+}(z)\left(\widehat{E}_{-+}(z) - \widehat{\widetilde{E}}_{-+}(z)\right)\widehat{\widetilde{E}}^{-1}_{-+}(z), \tag{2.38}$$

où $\widehat{\widetilde{E}}_{-+}^{-1}(z), \widehat{E}_{-+}^{-1}(z), \widehat{E}_{-+}(z), \widehat{\widetilde{E}}_{-+}(z)$ *sont les matrices associées aux opérateurs* $(\widetilde{E}_{-+}^{w}(x, hD_x+A(x), z; h))^{-1}$, $(E_{-+}^{w}(x, hD_x + A(x), z; h))^{-1}, (E_{-+}^{w}(x, hD_x + A(x), z; h)), (\widetilde{E}_{-+}^{w}(x, hD_x + A(x), z; h))$ *définies sur* V_0^N.

b) Comme $||R_+(x, hD_x + A(x))|| = \mathcal{O}(1)$ *dans* $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), l^2(\Gamma, \mathbb{C}^N))$ *uniformément en* h*, alors d'après* (2.23) *et pour* $\Im(z) \neq 0$*, on a :*

$$\left\|\widehat{E}_{-+}^{-1}(z)\right\|_{\mathcal{L}(l^2(\Gamma,\mathbb{C}^N))} \leqslant C \left\|\Big(P^w(hy, y, D_y + A(hy); h) - z\Big)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leqslant C|\Im(z)|^{-1}. \tag{2.39}$$

c) Par construction de $\widetilde{E}_{-+}(x, \xi + A(x), z; h)$ *on a,*

$$E_{-+}(x, \xi + A(x); h) - \widetilde{E}_{-+}(x, \xi + A(x), z; h) = E_{-+}^0(x, \xi + A(x), z) - \widetilde{E}_{-+}^0(x, \xi + A(x), z)$$

donc

$$supp\Big(E_{-+}(x, \xi + A(x); h) - \widetilde{E}_{-+}(x, \xi + A(x), z; h)\Big) = supp\Big(E_{-+}^0(x, \xi + A(x), z) - \widetilde{E}_{-+}^0(x, \xi + A(x), z)\Big).$$

En utilisant (2.30)*, on obtient :*

$$supp\Big(E_{-+}(x, \xi + A(x); h) - \widetilde{E}_{-+}(x, \xi + A(x), z; h)\Big) \subset \overline{B(0, 2R)}$$

et par suite

$$\Pi_x supp\Big(E_{-+}(x, \xi + A(x); h) - \widetilde{E}_{-+}(x, \xi + A(x), z; h)\Big) \subset \overline{B(0, 2R)}. \tag{2.40}$$

□

Rappelons maintenant le lemme suivant (pour la démonstration on renvoie à [18]) :

Lemme 2.8 *Soit* $Q(x, \xi) \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$ *est* Γ^**-périodique en* ξ*, tel que* $K = \Pi_x(supp\, Q)$ *est compact alors* $Q^w(x, hD_x)$ *de* V_0^d *dans* V_0^d *est à trace et on a :*

$$tr\Big(Q^w(x, hD_x)\Big) = (2\pi h)^{-n} \int_{\mathbb{R}_x^n} \int_{E^*} \widehat{\mathrm{tr}}\Big(Q(x, \xi)\Big) dx d\xi + \mathcal{O}(h^\infty) \tag{2.41}$$

et de même si $g(x, \xi) \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$ *esst* Γ^**-périodique en* ξ *et* $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*, on a*

$$tr\Big[Op^w\Big(g(x, \xi)\varphi(x)\Big)\Big] = (2\pi h)^{-n} \int_{\mathbb{R}_x^n} \int_{E^*} \widehat{\mathrm{tr}}\Big(g(x, \xi)\Big)\varphi(x) dx d\xi + \mathcal{O}(h^\infty). \tag{2.42}$$

En utilisant (2.40) et le lemme précédent on déduit que $(E_{-+}^w - \widetilde{E}_{-+}^w)$ est un opérateur à trace. Combinons ceci avec 2.39, on obtient :

$$\left\|\widehat{E}_{-+}^{-1} \circ (\widehat{E}_{-+} - \widehat{\widetilde{E}}_{-+}) \circ \widehat{\widetilde{E}}_{-+}^{-1}\right\|_{tr} \leq C|\Im(z)|^{-1} \left\|\widehat{E}_{-+} - \widehat{\widetilde{E}}_{-+}\right\|_{tr}. \tag{2.43}$$

Dans la suite, nous allons étudier $tr\,(f(P))$. Rappelons que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $suppf \subset]\alpha, \beta[$. Soit $\widetilde{f}$

une extension de f telle que : $\widetilde{f}(z) \in C_0^\infty(\mathbb{C})$, $supp\widetilde{f} \subset \mathcal{V}$ ($\mathcal{V}$ *voisinage complexe de* $]\alpha, \beta[$) $\widetilde{f}(z) = f(z)$ pour tout z dans $\mathbb{R}$, $\overline{\partial}\widetilde{f}(z) = \mathcal{O}(|\Im z|^N)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Lemme 2.9 *Soit $g(z)$ une fonction holomorphe, définie dans un voisinage de $suppf$, de racines $(z_k)_{k\geq 1}$ réelles répétées selon leurs multiplicités, alors :*

$$-\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)\frac{g'(z)}{g(z)}L(dz) = \sum_{k\geq 1} f(z_k) \tag{2.44}$$

où, $\overline{\partial} := \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$, $L(dz)$ est la mesure de Lebesgue sur le plan complexe.

Preuve. Pour z dans un voisinage Ω de $supp\widetilde{f}$ on a :

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{z - z_k} + h(z), \tag{2.45}$$

où $h(z)$ est une fonction holomorphe sur Ω, par intégration par partie et puisque $h(z)$ est holomorphe en z on obtient :

$$-\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)h(z)L(dz) = 0. \tag{2.46}$$

Nous remplaçons (2.45) dans (2.44) et en utilisant (2.46) on obtient :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)\frac{\partial_z g(z)}{g(z)}L(dz) &= -\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)\sum_{k\geq 1}\frac{1}{z - z_k}L(dz) - \underbrace{\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)h(z)L(dz)}_{=0} \\
&= -\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)\sum_{k\geq 1}\frac{1}{z - z_k}L(dz) \\
&= \sum_{k\geq 1} f(z_k).
\end{aligned}$$

Dans la dernière égalité, on a utilisé le fait que $\overline{\partial}\,(\frac{1}{z - z_0}) = \pi\delta(. - z_0)$.

Pour étudier $f(P^w(hy, y, D_y + A(hy); h))$, nous allons utiliser la formule de B.Helffer-J.Sjöstrand.

Proposition 2.10 *Sous les hypothèses du théorème 1.3 et pour h assez petit l'opérateur $f(P^w(hy, y, D_y + A(hy); h))$ est de classe trace et on a :*

$$\begin{aligned}
tr\Big(\, f(P^w(hy, y, D_y + A(hy); h))\Big) &= tr\left(-\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)\partial_z \widehat{E}_{-+}(z)\widehat{E}_{-+}^{-1}(z)\widehat{\chi}\,L(dz)\right) \\
&\quad + \mathcal{O}(h^\infty),
\end{aligned} \tag{2.47}$$

où $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ est égal à un sur un voisinage de $\Lambda = \pi_x\left(supp\left(E_{-+}^0(x, \xi + A(x), z) - \widetilde{E}_{-+}^0(x; \xi + A(x), z)\right)\right)$, $\widehat{\chi}$ la matrice associée à l'opérateur de multiplication $\chi(x)$ défini sur V_0^N.

Preuve. (2.22) combiné avec la formule de Helffer-Sjöstrand donne :

$$\begin{aligned} f\Big(P^w(hy,y,D_y+A(hy);h)\Big) &= -\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)\Big(z-P^w(hy,y,D_y+A(hy);h)\Big)^{-1}L(dz) \\ &= \frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)\widehat{E}(z)L(dz) - \frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)\widehat{E}_+(z)\widehat{E}_{-+}^{-1}(z)\widehat{E}_-(z)L(dz) \quad (2.48)\\ &= -\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)\widehat{E}_+(z)\widehat{E}_{-+}^{-1}(z)\widehat{E}_-(z)L(dz). \end{aligned}$$

Dans (2.48) nous avons utilisé le fait que $\widehat{E}(z)$ est holomorphe en z, dans un voisinage de supp $\widetilde{f}$ pour obtenir $\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)\widehat{E}(z)L(dz)=0$.

Remplaçant $\widehat{E}_{-+}^{-1}(z)$ par (2.38), on obtient :

$$-\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)\widehat{E}_+(z)\widehat{E}_{-+}^{-1}(z)\widehat{E}_-(z)L(dz) = -\frac{1}{\pi}\int\ \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)\widehat{E}_+(z)\widehat{\widehat{E}}{}_{-+}^{-1}(z)\widehat{E}_-(z)L(dz)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)\widehat{E}_+(z)\widehat{E}_{-+}^{-1}(z)(\widehat{E}_{-+}(z)-\widehat{\widehat{E}}_{-+}(z))\widehat{\widehat{E}}{}_{-+}^{-1}(z)\widehat{E}_-(z)L(dz)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)\widehat{E}_+(z)\widehat{E}_{-+}^{-1}(z)(\widehat{E}_{-+}(z)-\widehat{\widehat{E}}_{-+}(z))\widehat{\widehat{E}}{}_{-+}^{-1}(z)\widehat{E}_-(z)L(dz).$$

Dans la dernière égalité on a utilisé le fait que $\widehat{E}_+(z)\widehat{\widehat{E}}{}_{-+}^{-1}(z)\widehat{E}_-(z)$ est analytique dans un voisinage de supp $\widetilde{f}$ et on a également utilisé une intégration par partie pour obtenir

$$-\frac{1}{\pi}\int\ \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)\widehat{E}_+(z)\widehat{\widehat{E}}{}_{-+}^{-1}(z)\widehat{E}_-(z)L(dz)=0.$$

Par construction de $\widehat{\widehat{E}}_{-+}(z)$ le support du symbole de $\widehat{E}_{-+}(z)-\widehat{\widehat{E}}_{-+}(z)$ est compact, il résulte alors du lemme 2.8 que l'opérateur $\widehat{E}_{-+}(z)-\widehat{\widehat{E}}_{-+}(z)$ est de classe trace et par suite $f(P^w(hy,y,D_y+A(hy);h))$ est de classe trace et on a :

$$tr\Big(f(P^w(hy,y,D_y+A(hy);h)\Big) = tr\left(\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)(\widehat{E}_+(z)\widehat{E}_{-+}^{-1}(z)(\widehat{E}_{-+}(z)-\widehat{\widehat{E}}_{-+}(z))\widehat{\widehat{E}}{}_{-+}^{-1}(z)\widehat{E}_-(z))L(dz)\right).$$

En utilisant la propriété de la cyclicité de trace et le fait que $\partial_z\widehat{E}_{-+}(z)=\widehat{E}_-(z)\widehat{E}_+(z)$, on trouve

$$\begin{aligned} tr\Big(f(P^w(hy,y,D_y+A(hy);h)\Big) &= \frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)tr\left(\widehat{E}_+(z)\widehat{E}_{-+}^{-1}(z)(\widehat{E}_{-+}(z)-\widehat{\widehat{E}}_{-+}(z))\widehat{\widehat{E}}{}_{-+}^{-1}(z)\widehat{E}_-(z)\right)L(dz)\\ &= \frac{1}{\pi}\int\ \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)tr\left(\partial_z\widehat{E}_{-+}(z)\widehat{E}_{-+}^{-1}(z)(\widehat{E}_{-+}(z)-\widehat{\widehat{E}}_{-+}(z))\widehat{\widehat{E}}{}_{-+}^{-1}(z)\right)L(dz). \end{aligned}$$

Soit $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R},[0,1])$ égale à 1 sur un voisinage de $\Lambda=\pi_x((suppE_{-+}^0(x,\xi+A(x),z)-\widetilde{E}_{-+}^0(x;\xi+A(x),z))$, $\widehat{\chi}$ la matrice associée à l'opérateur de multiplication $\chi(x)$ défini sur V_0^N. Alors,

$$tr\Big(f(P^w(hy,y,D_y+A(hy);h)\Big) \quad (2.49)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\widetilde{f}(z) tr\left(\partial_z \widehat{E}_{-+}(z)\widehat{E}_{-+}(z)^{-1}(\widehat{E}_{-+}(z)-\widehat{\widehat{E}}_{-+}(z))\widehat{\widehat{E}}_{-+}^{-1}(z)\widehat{\chi}\right)L(dz)\\
&+\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\widetilde{f}(z) tr\left(\partial_z \widehat{E}_{-+}(z)\widehat{E}_{-+}^{-1}(z)(\widehat{E}_{-+}(z)-\widehat{\widehat{E}}_{-+}(z))\widehat{\widehat{E}}_{-+}^{-1}(z)(1-\widehat{\chi})\right)L(dz)\\
&= \frac{1}{\pi}\,\overline{\partial}\widetilde{f}(z) tr\left(\partial_z \widehat{E}_{-+}(z)\widehat{\widehat{E}}_{-+}^{-1}(z)\widehat{\chi}\right)L(dz) - \frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\widetilde{f}(z) tr\left(\partial_z \widehat{E}_{-+}(z)\widehat{E}_{-+}^{-1}(z)\widehat{\chi}\right)L(dz)\\
&+\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\widetilde{f}(z) tr\left(\partial_z \widehat{E}_{-+}(z)\widehat{E}_{-+}^{-1}(z)(\widehat{E}_{-+}(z)-\widehat{\widehat{E}}_{-+}(z))\widehat{\widehat{E}}_{-+}^{-1}(z)(1-\widehat{\chi})\right)L(dz)\\
&= \frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\widetilde{f}(z) tr\left(\partial_z \widehat{E}_{-+}(z)\widehat{E}_{-+}^{-1}(z)(\widehat{E}_{-+}(z)-\widehat{\widehat{E}}_{-+}(z))\widehat{\widehat{E}}_{-+}^{-1}(z)(1-\widehat{\chi})\right)L(dz)\\
&-\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\widetilde{f}(z) tr\left(\partial_z \widehat{E}_{-+}(z)\widehat{E}_{-+}^{-1}(z)\widehat{\chi}\right)L(dz) = (1)+(2).
\end{aligned}
$$

Ici,

$$(1) = -\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\widetilde{f}(z) tr\left(\partial_z \widehat{E}_{-+}(z)\widehat{E}_{-+}^{-1}(z)\widehat{\chi}\right)L(dz).$$

Dans la dernière égalité de (2.49) on a utilisé le fait que $\partial_z \widehat{E}_{-+}(z)\widehat{\widehat{E}}_{-+}^{-1}(z)$ est analytique en z dans un voisinage complexe de $supp\widetilde{f}$ et par intégration par partie on obtient :

$$\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\widetilde{f}(z)\partial_z \widehat{E}_{-+}(z)\widehat{\widehat{E}}_{-+}^{-1}(z)L(dz) = 0.$$

Puisque χ égale à 1 sur un voisinage de $\Lambda = \pi_x(supp(E^0_{-+}(x,\xi+A(x),z)-\widetilde{E}^0_{-+}(x;\xi+A(x),z))$, alors $\pi_x(suppE^0_{-+}(x,\xi+A(x),z)-\widehat{E}^0_{-+}(x;\xi+A(x),z,))\cap supp(1-\chi)=\emptyset$ on démontre comme dans [10, théorème 3.4] que

$$||(2)||_{tr} = \mathcal{O}(h^\infty), \tag{2.50}$$

par conséquent

$$\left\| f\Big(P^w\,(hy,y,D_y+A(hy);h)\Big)\Big(1-\widehat{\chi}\Big)\right\|_{tr} = \mathcal{O}(h^\infty) \tag{2.51}$$

(2.48) combinée avec (2.49), (2.50) et (2.51) donnent :

$$
\begin{aligned}
tr\left(f(P^w(hy,y,D_y+A(hy);h))\right) &= tr\left(f(P^w(hy,y,D_y+A(hy);h))\,\widehat{\chi}\right)+\mathcal{O}(h^\infty)\\
&= tr\left(-\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\widetilde{f}(z)\partial_z\widehat{E}_{-+}(z)\widehat{E}_{-+}^{-1}(z)\widehat{\chi}L(dz)\right)+\mathcal{O}(h^\infty).
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

□

Remarque 2.11 *Soit $g_h(z)\in C^\infty((0,h_0)\times\mathbb{C})$. On suppose que $g_h(z)$ est analytique en z, à valeurs réelles pour $z\in\mathbb{R}$ et $g_h(z)=\mathcal{O}(e^{|\Im(z)|/h})$. Alors (2.52) reste vraie si on remplace $f(x)$ par $f(x)g_h(x)$. En effet on peut remplacer dans (2.52) $\overline{\partial}\widetilde{f}(z)$ par $\overline{\partial}(\widetilde{f}\chi_h)(z)$ où $\chi_h(z):=\chi(\frac{\Im(z)}{h})$, ici $\chi(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, égale à un dans un voisinage de zéros. Maintenant il suffit de remarquer que $\widetilde{f}(z)g_h(z)$ est une extension presque analytique de $f(x)g_h(x)$ et $\overline{\partial}(\widetilde{f}\chi_h)(z)g_h(z)=\mathcal{O}(\frac{|\Im(z)|}{h})$.*

□

Pour utiliser les résultats de l'analyse semi-classique, il sera utile dans la suite de travailler avec l'opérateur

$$-\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)E^w_{-+}(x,hD_x+A(x),z;h)\circ(E^w_{-+}(x,hD_x+A(x),z;h))^{-1}\chi(x)L(dz),$$

défini sur V_0^N *(part identification de* $l^2(\Gamma,\mathbb{C}^N)$ *à* V_0^N *). Rappelons tout d'abord le lemme suivant :*

Lemme 2.12 ([58]) *Soit* $A=A_{h,\delta}: S(\mathbb{R}^n)\longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ *pour* $]0,h_0]\times]0,\delta_0]$ *on suppose que pour tout* $N=0,1,...$ *et toute suite finie* $j_1,j_2,...,j_N$ *dans* $\{1,2,..,n,n+1,..,2n\}$ *l'opérateur* $adLj_1\circ....\circ adLj_NA$ *est* $\Theta((h/\delta)^N)$ *dans* $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$. *Ici* $L_j=x_j, 1\leqslant j\leqslant n$, $L_j=\frac{h}{i}\partial_{x_{j-n}}$ *pour* $n+1\leqslant j\leqslant 2n$. *Alors il existe* $a(x,\xi,\delta,h)$ *vérifiant :*

(*i*) *Pour* h,δ *fixés* $a(x,\xi,\delta,h)\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi})$.

(*ii*) *Pour tous* α,β *il existe* $C_{\alpha,\beta}$ *tel que :*

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x,\xi,\delta,h)\right|\leqslant C_{\alpha,\beta}\delta^{-|\alpha|-|\beta|}$$

dans la zone $\frac{h}{\delta^2}\leqslant 1$

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x,\xi,\delta,h)\right|\leqslant C_{\alpha,\beta}\left(\frac{h}{\delta^2}\right)^{2n+1}\delta^{-|\alpha|-|\beta|}$$

dans la zone $\frac{h}{\delta^2}\geq 1$

tel que

$$A=A_{h,\delta}=Op_h^w(a(x,\xi,\delta,h)).$$

Ici ad_AB *est le commutateur de* A *et* B *donné par* $ad_AB:=[A,B]=AB-BA$.

Proposition 2.13 *Fixons* $\delta\in(0,1/2)$. *Il existe* $g(x,\xi;h)\in\mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n};\mathcal{L}(\mathbb{C}^N;\mathbb{C}^N))$ *tel que :*
i)

$$g(x,\xi;h)\sim\sum_{j\geq 0}C_j(x,\xi)h^j \text{ dans } \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n};\mathcal{L}(\mathbb{C}^N;\mathbb{C}^N)) \quad (2.53)$$

ii)

$$Op_h^w\Big(g(x,\xi;h)\Big) \quad (2.54)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{|\Im(z)|\geq h^\delta}\overline{\partial}\widetilde{f}(z)(E^w_{-+}(x,hD_x+A(x),z;h))^{-1}\partial_zE^w_{-+}(x,hD_x+A(x),z;h)L(dz)$$

iii) les C_j *sont* Γ^**-périodiques en* ξ *pour tout* $j\geq 0$ *et* $C_0(x,\xi)$ *est définie par :*

$$C_0(x,\xi)=-\frac{1}{\pi}\int\overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)\partial_zE^0_{-+}(x,\xi+A(x),z)(E^0_{-+}(x,\xi+A(x),z))^{-1}L(dz).$$

Preuve. Soit $l_1,l_2,..$ des formes linéaires de $\mathbb{R}^{2n}$ et soit $L_j=l_j(x,hD_x)$. D'après l'identité

$$E^w_{-+}\circ(E^w_{-+})^{-1}=(E^w_{-+})^{-1}\circ(E^w_{-+})=I,$$

on a

$$ad_{Lj}(E^w_{-+})^{-1} = -(E^w_{-+})^{-1} \circ ad_{Lj}E^w_{-+} \circ (E^w_{-+})^{-1},$$

où $ad_{Lj}(A)$ est le commutateur de $[L_j, A]$. En utilisant la formule

$$ad_{Lj}(A \circ B) = (ad_{Lj}A) \circ (B + A) \circ ad_{Lj}B$$

on obtient :

$$\begin{aligned} ad_{Lj_1}\Big(\partial_z E^w_{-+} \circ (E^w_{-+})^{-1}\Big) &= (ad_{Lj_1}\partial_z E^w_{-+}) \circ \Big(\partial_z E^w_{-+} + (E^w_{-+})^{-1}\Big) \circ ad_{Lj_1}(E^w_{-+})^{-1} \\ &= ad_{Lj_1}\partial_z E^w_{-+} \circ \Big(\partial_z E^w_{-+} + (E^w_{-+})^{-1}\Big) \circ \Big(-(E^w_{-+})^{-1} \circ ad_{Lj_1}E^w_{-+} \circ (E^w_{-+})^{-1}\Big) \\ &= -ad_{Lj_1}\partial_z E^w_{-+} \circ \partial_z E^w_{-+} \circ (E^w_{-+})^{-1} \circ ad_{Lj_1}E^w_{-+} \circ (E^w_{-+})^{-1} \\ &+ ad_{Lj_1}\partial_z E^w_{-+} \circ (E^w_{-+})^{-1} \circ \Big(-(E^w_{-+})^{-1} \circ ad_{Lj_1}E^w_{-+} \circ (E^w_{-+})^{-1}\Big). \end{aligned} \tag{2.55}$$

Puisque

$$\Big\|\Big(E^w_{-+}(x, hD_x + A(x), z, h)\Big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}^N))} = \Theta(|\Im(z)|^{-1})$$

et le fait que $E^w_{-+}, \partial_z E^w_{-+}$ sont des opérateurs h-pseudo-différentiels de symbole dans $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^N))$ on a :

$$\Big\|ad_{Lj_1}(E^w_{-+})^{-1}\Big\| = \Big\|-(E^w_{-+})^{-1} \circ ad_{Lj_1}E^w_{-+} \circ (E^w_{-+})^{-1}\Big\| = \Theta\Big(\frac{h}{|\Im(z)|^2}\Big)$$

et par-suite

$$\Big\|-ad_{Lj_1}\partial_z E^w_{-+} \circ \partial_z E^w_{-+} \circ (E^w_{-+})^{-1} \circ ad_{Lj_1}E^w_{-+} \circ (E^w_{-+})^{-1}\Big\| = \Theta\Big(\frac{h}{|\Im(z)|^2}\Big)$$

et

$$\Big\|ad_{Lj_1}\partial_z E^w_{-+} \circ (E^w_{-+})^{-1} \circ \Big(-(E^w_{-+})^{-1} \circ ad_{Lj_1}E^w_{-+} \circ (E^w_{-+})^{-1}\Big)\Big\| = \Theta\Big(\frac{h}{|\Im(z)|^2}\Big).$$

Donc

$$\begin{aligned} \Big\|ad_{Lj_1}\Big(\partial_z E^w_{-+} \circ (E^w_{-+})^{-1}\Big)\Big\| &< \Big\|-ad_{Lj_1}\partial_z E^w_{-+} \circ \partial_z E^w_{-+} \circ (E^w_{-+})^{-1} \circ ad_{Lj_1}E^w_{-+} \circ (E^w_{-+})^{-1}\Big\| \\ &+ \Big\|ad_{Lj_1}\partial_z E^w_{-+} \circ (E^w_{-+})^{-1} \circ \Big(-(E^w_{-+})^{-1} \circ ad_{Lj_1}E^w_{-+} \circ (E^w_{-+})^{-1}\Big)\Big\| \\ &= \Theta\Big(\frac{h}{|\Im(z)|^2}\Big). \end{aligned} \tag{2.56}$$

Ce qui prouve que

$$\Big\|ad_{Lj_1}\partial_z E^w_{-+} \circ (E^w_{-+})^{-1}\Big\| = \Theta\Big(\frac{h}{|\Im(z)|^2}\Big)$$

et on démontre par récurrence :

$$\Big\|ad_{Lj_1} \circ ... \circ ad_{LN}\partial_z E^w_{-+} \circ (E^w_{-+})^{-1}\Big\| = \Theta\Big(\frac{h^N}{|\Im(z)|^{N+1}}\Big)$$

du lemme 2.56 on déduit que $\partial_z E_{-+}^w \circ (E_{-+}^w)^{-1} = Op_h^w(g(x,\xi,z;h))$ avec

$$\left\| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta g(x,\xi,z;h) \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^N,\mathbb{C}^N)} \leqslant C_{\alpha,\beta}\, max \left(1, \frac{h}{|\Im(z)|^2}\right)^{2n+1} |\Im(z)|^{-1-|\alpha|-|\beta|}$$

ce qui implique que pour $\delta \in (0,1/2)$ on a :

$$g(x,\xi;h) := \frac{1}{\pi} \int_{|\Im z| \geq h^\delta} \overline{\partial}\, \widetilde{f}(z) g(x,\xi,z;h) L(dz) \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}; \mathcal{L}(\mathbb{C}^N;\mathbb{C}^N)).$$

Ceci donne 2.54. D'autre part, d'après la proposition le symbole associé à l'opérateur $E_{-+}^w(x,hD_x,z;h)$ admet un développement asymptotique en puissances de h. Par le calcul h-pseudo-différentiel le symbole associé à $(E_{-+}^w(x,hD_x,z;h))^{-1}\partial_z E_{-+}^w(x,hD_x,z;h)$ admet aussi un développement asymptotique en puissances de h dans la zone $|\Im z| > h^\delta$. Ceci implique 2.53. Enfin, la troisième propriété résulte de la Γ^*-périodicité par rapport a ξ de $E_{-+}(x,\xi,z;h)$ et du calcul symbolique.

$\square$

Lemme 2.14 *. Il existe une suite* $C_j \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}(\mathbb{C}^N,\mathbb{C}^N))$ *et une suite* $R_N \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^N))$ *pour* $N \geq N_0$*,* N_0 *assez grand de sorte que*

$$G(h) = -\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\, \widetilde{f}(z) \partial_z E_{-+}^w(x,hD_x+A(x),z;h) \circ (E_{-+}^w(x,hD_x+A(x),z;h))^{-1} L(dz) \tag{2.57}$$

$$= \sum_{j=0}^N h^j Op_h^w(C_j(x,\xi)) + h^{N+1} R_N(h)$$

et $\sup_{h\in]0,h_0[} ||R_N(h)|| < +\infty$*. De plus les* $C_j(x,\xi)$ *sont* Γ^*-*périodique en* ξ*, et*

$$C_0(x,\xi) = -\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\, \widetilde{f}(z) \partial_z E_{-+}^0(x,\xi,z) E_{-+}^0(x,\xi,z)^{-1} L(dz).$$

Preuve.

Fixons $\delta \in (0,1/2)$. On a :

$$G(h) = -\frac{1}{\pi}\int_{|\Im z| \geq h^\delta} \overline{\partial}\, \widetilde{f}(z) \partial_z E_{-+}^w(x,hD_x+A(x),z;h) \circ (E_{-+}^w(x,hD_x+A(x),z;h))^{-1} L(dz)$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{|\Im z| < h^\delta} \overline{\partial}\, \widetilde{f}(z) \partial_z E_{-+}^w(x,hD_x+A(x),z;h) \circ (E_{-+}^w(x,hD_x+A(x),z;h))^{-1} L(dz) =: (1)+(2).$$

D'après la proposition 2.13, pour obtenir le lemme il suffit de montrer que

$$(2) = \mathcal{O}(h^\infty), \quad \text{dans } \mathcal{L}(l^2(\Gamma;\mathcal{C}^N)). \tag{2.58}$$

Puisque $\overline{\partial}\, \widetilde{f}(z) = \mathcal{O}(|\Im(z)|^N); \forall N \in \mathbb{N}$, 2.58 résulte de 2.39 et du fait que $E_{-+}^w(x,hD_x+A(x),z;h)$ est uniformément borné par rapport à $z \in \operatorname{supp}(f)$ et $h \in]0, h_0($ donne

$$\left\| \overline{\partial}\, \widetilde{f}(z) \partial_z \widehat{E}_{-+}(z) \widehat{E}_{-+}^{-1}(z) \right\|_{\mathcal{L}(l^2(\Gamma;\mathbb{C}^N))} = \mathcal{O}(|\Im(z)|^{N-1} h)$$

donc si $|\Im(z)| < h^\delta$ on obtient :

$$\left\| \overline{\partial}\, \widetilde{f}(z) \partial_z \widehat{E}_{-+}(z) \widehat{E}_{-+}^{-1}(z) \right\|_{\mathcal{L}(l^2(\Gamma;\mathbb{C}^N))} = \mathcal{O}(h^{\delta(N-1)} h) = \mathcal{O}(h^N)$$

d'où

$$\left\| \int_{|\Im(z)| \leqslant h^\delta} \overline{\partial}\, \widetilde{f}(z) \partial \widehat{E}_{-+}(z) \widehat{E}_{-+}^{-1}(z) L(dz) \right\|_{tr} = \mathcal{O}(h^\infty)$$

et

$$tr \left(\int_{|\Im(z)| \leqslant h^\delta} \overline{\partial}\, \widetilde{f}(z) \partial \widehat{E}_{-+}(z) \widehat{E}_{-+}^{-1}(z) L(dz) \right) = \mathcal{O}(h^\infty).$$

Donc on peut réduire le domaine d'intégration à $K_\delta = \left\{ z \in \mathbb{C}^N;\ |\Im(z)| \geq h^\delta, \delta \in (0, \tfrac{1}{2}) \right\}$ et on obtient :

$$Op_h^w(g(x,\xi;h)) = -\frac{1}{\pi} \int_{K_\delta} \overline{\partial}\, \widetilde{f}(z)\, \partial_z E_{-+}^w(x, hD_x + A(x), z; h) (E_{-+}^w(x, hD_x + A(x), z; h))^{-1} L(dz).$$

$\square$

En utilisant le lemme 2.14 on peut écrire

$$G(h)\chi(x) = \sum_{j=0}^{N} h^j Op_h^w \Big(C_j(x,\xi) \Big) \chi(x) + h^{N+1} R_N \chi(x)$$

et d'après le lemme 2.13 et la proposition 2.10, on obtient :

$$tr\Big(f(P^w(hy, y, D_y + A(hy); h)) \Big) = tr\Big(G(h)\chi(x) \Big) = \sum_{j=1}^{N} tr\Big(Op_h^w(C_j(x,\xi))\chi(x) \Big) h^j + \mathcal{O}(h^{N+1}), \quad (2.59)$$

puisque le support de χ est compact donc en appliquant le lemme 2.8, on obtient :

$$tr\Big[Op^w(C_j(x,\xi))\chi(x) \Big] = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}_x^n} \int_{E^*} \widehat{\operatorname{tr}}(C_j(x,\xi))\chi(x) dx d\xi + \mathcal{O}(h^\infty) \quad (2.60)$$

(2.59) combinée avec (2.60) donne $\forall N \in \mathbb{N}$, on a :

$$tr\Big(f(P^w(hy, y, D_y + A(hy); h)) \Big) = \sum_{j=0}^{N} a_j(f) h^{j-n} + \mathcal{O}(h^{N+1}) \quad (2.61)$$

où,

$$a_j(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int_{\mathbb{R}_x^n \times E^*} \widehat{\operatorname{tr}}(C_j(x,\xi))\chi(x) dx d\xi.$$

Ce qui achève la démonstration de (1.9). Pour finir nous calculons $a_0(f)$,

$$a_0(f)=(2\pi)^{-n}\int\int_{\mathbb{R}^n_x\times E^*} tr\Big[C_0(x,\xi)\Big]\chi(x)dxd\xi$$

$$=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n_x}\Big(-\frac{1}{\pi}\int_{E^*}\int\overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)tr\Big[\partial_z E^0_{-+}(x,\xi+A(x),z)\circ E^0_{-+}(x,\xi+A(x),z)^{-1}\Big]\chi(x)L(dz)\Big)\,dxd\xi.$$

En utilisant (2.52),(2.57) la formule de Liouville (c'est-à-dire, dans l'espace vectoriel des matrices à coefficients complexes) on a :

$$\Big(detA(t)\Big)\,tr\Big(\partial_t A(t)A(t)^{-1}\Big)=\partial_t\Big(det(A(t))\Big),$$

et le fait que $E^0_{-+}(x,\xi,z)$ est Γ^*-périodique en ξ on obtient :

$$\begin{aligned}&(2\pi)^n a_0(f) \qquad\qquad (2.62)\\
&=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^n_x}\int_{E^*}\int\overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)tr\left(\partial_z E^0_{-+}(x,\xi+A(x),z)\circ E^0_{-+}(x,\xi+A(x),z)^{-1}\right)\chi(x)L(dz)d\xi dx\\
&=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^n_x}\int_{E^*}\int\overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)\frac{\partial_z det\,E^0_{-+}(x,\xi+A(x),z)}{detE^0_{-+}(x,\xi+A(x),z)}L(dz)\chi(x)d\xi dx\\
&=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^n_x}\int_{E^*}\int\overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)\frac{\partial_z det\,E^0_{-+}(x,\xi,z)}{detE^0_{-+}(x,\xi,z)}L(dz)\chi(x)d\xi dx.\end{aligned}$$

(2.62) combinée avec(2.13), le lemme 2.9, la remarque 2.2.d, et puisque $\chi(x)$ vaut 1 sur $\pi_x Supp\ (f(\mu_k(x,\xi))$ alors

$$a_0(f)=\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\geq 1}\int_{\mathbb{R}^n_x}\int_{E^*} f\Big(\mu_k(x,\xi)\Big)dxd\xi.$$

En particulier, si $p(y,\xi)=\widetilde{p}(y,\xi)$, on a :

$$a_0(f)=\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\geq 1}\int_{\mathbb{R}^n_x}\int_{E^*} f\Big((1+\varphi(x))\lambda_k(\xi)+\psi_0(x)\Big)dxd\xi. \tag{2.63}$$

Il est bien connu (voir définition 2.6) que la densité d'états, $\rho(t)$ associée à l'opérateur $p^w(y,D_y)$ est donnée par la formule

$$\rho(t):=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{E^*}(\sum_{\lambda_k(\xi)\leqslant t}\mathbb{1})d\xi. \tag{2.64}$$

Ici $(\lambda_k(\xi))_{k\geq 1}$ désigne les valeurs propres de Floquet associées à P_0.

Pour $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\int f(t)d\rho(t)&=\int f(t)\frac{d\rho(t)}{dt}dt=-\int f'(t)\rho(t)dt\\
&=-(2\pi)^{-n}\sum_{k\geq 1}\int_{E^*}\int_{\lambda_k(\xi)}^{+\infty} f'(t)dtd\xi\\
&=(2\pi)^{-n}\sum_{k\geq 1}\int_{E^*} f(\lambda_k(\xi))d\xi,\end{aligned}\tag{2.65}$$

de même que (2.65), on obtient :

$$\int f\Big((1+\varphi(x))t+\psi_0(x)\Big)d\rho(t)=\int f\Big((1+\varphi(x))t+\psi_0(x)\Big)\frac{d\rho(t)}{dt}dt \tag{2.66}$$

$$=-\int(1+\varphi(x))f'\Big((1+\varphi(x))t+\psi_0(x)\Big)\rho(t)dt$$

$$=-(2\pi)^{-n}\sum_{k\geq 1}\int_{E^*}\int_{\lambda_k(\xi)}^{+\infty}(1+\varphi(x))f'\Big((1+\varphi(x))t+\psi_0(x)\Big)dtd\xi$$

$$=(2\pi)^{-n}\sum_{k\geq 1}\int_{E^*}f\Big((1+\varphi(x))\lambda_k(\xi)+\psi_0(x)\Big)d\xi.$$

Maintenant les formules (2.63), (2.65) et (2.66) donnent (1.10).

□

Remarque 2.15 *En utilisant* (2.65) *on peut écrire* $a_0(f)$ *de la manière suivante :*

$$a_0(f)=(2\pi)^{-n}\sum_{k\geq 1}\int_{\mathbb{R}^n_x}\int_{E^*}f\Big((1+\varphi(x))\lambda_k(\xi)+\psi_0(x)\Big)dxd\xi$$

$$=-(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n_x}\int_{\mathbb{R}_t}f'(t)\left(\int_{E^*}\sum_{(1+\varphi(x))\lambda_k(\xi)+\psi_0(x)\leq t}\mathbb{1}d\xi\right)dt$$

$$=-(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n_x}\int_{\mathbb{R}_t}f'(t)\left(\int_{E^*}\sum_{\lambda_k(\xi)\leq\frac{t-\psi_0(x)}{1+\varphi(x)}}\mathbb{1}d\xi\right)dt=-\int_{\mathbb{R}^n_x}\int_{\mathbb{R}_t}f'(t)\left[\rho\Big(\frac{t-\psi_0(x)}{1+\varphi(x)}\Big)\right]dxdt.$$

Donc on peut écrire $a_0(f)$ *sous la forme*

$$a_0(f)=-\int_{\mathbb{R}^n_x}\int_{\mathbb{R}_t}f'(t)\left[\rho\Big(\frac{t-\psi_0(x)}{1+\varphi(x)}\Big)\right]dxdt.$$

3 Perturbation des bandes magnétiques

On suppose ici que $p(y,\eta)=\sum_{i=1}^n\eta_i^2+V(y)$. Nous allons appliquer les résultats précédents à l'opérateur :

$$P(h)=p^w\left(y,D_y+\frac{\omega\times y}{2}+A(hy)\right)+\left(\varphi(hy)p\Big(y,D_y+\frac{\omega\times y}{2}+A(hy)\Big)\right)^w+\psi(hy,y;h)$$

$$=P^w\left(hy,y,D_y+\frac{\omega\times y}{2}+A(hy);h\right);\ \ (h\searrow 0),$$

où $\varphi, A(x)=(A_1(x),..,A_n(x))\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, on suppose que $V\in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ est Γ-périodique, la fonction ψ vérifie ($\mathbf{H_6}$), $\inf_{x\in\mathbb{R}^n}(1+\varphi(x))>0$ et que

$$\langle\omega,\Gamma\times\Gamma\rangle\subset(2\pi\mathbb{Z})^n.$$

Dans cette section on s'intéresse au comportement des valeurs propres discrètes de $P(h)$ dans un intervalle $[\alpha,\beta]$ disjoint du spectre essentiel de $P(h)$ et pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $supp f \subset [\alpha,\beta]$; on démontre que la trace de $f(P(h))$ admet un développement asymptotique en puissance de h et on donne son terme principal.

Lemme 3.1 *Si ω vérifie l'hypothèse $\langle \omega, \Gamma\times\Gamma\rangle \subset (2\pi\mathbb{Z})^n$ alors*

$$\sigma\Big(p^w\Big(y, D_y + \frac{\omega\times y}{2}\Big)\Big) = \sigma_{ess}\Big(p^w\Big(y, D_y + \frac{\omega\times y}{2}\Big)\Big) = \bigcup_{k=1}^{+\infty}\Lambda_k \quad avec \quad \Lambda_k = \lambda_k(\mathbb{R}^n/\Gamma^*).$$

□

D'après le lemme 2.16, le spectre de l'opérateur $P_0 = p^w\left(y, D_y + \frac{\omega\times y}{2}\right)$ est constitué des bandes $\Lambda_k, k = 1, 2, ...$

$$\sigma(P_0) = \sigma_{ess}(P_0) = \bigcup_{k=0}^{+\infty}\Lambda_k \quad avec \quad \Lambda_k = \lambda_k(\mathbb{R}^n/\Gamma^*). \tag{3.1}$$

La démonstration du lemme 1.1 montre que si $g(y)$ est régulier et tend vers 0 à l'infini alors $g(y)(i + p^w(y, D_y))^{-1}$ est compact. En combinant ceci avec un résultat classique sur les opérateurs de Schrödinger avec potentiel magnétique (voir [3]), on déduit que $g(y)\Big(i + p^w(y, D_y + \frac{\omega\times y}{2})\Big)^{-1}$ est compact. Maintenant, en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 1.1 , on obtient :

Lemme 3.2

$$\sigma_{ess}\Big(P^w\Big(hy, y, D_y + \frac{\omega\times 0y}{2}; h\Big)\Big) = \sigma_{ess}\left(p^w\Big(y, D_y + \frac{\omega\times y}{2}\Big)\right) = \sigma\left(p^w\Big(y, D_y + \frac{\omega\times y}{2}\Big)\right).$$

Les démonstrations des résultats suivants sont similaires aux proposition 1.2 et théorème 1.3.

Proposition 3.3 *Soit I un intervalle fermé disjoint du spectre de P_0. Alors, il existe $h_0 > 0$ assez petit tel que :*

$$I \cap \sigma\Big(p^w\Big(y, D_y + \frac{\omega\times y}{2} + A(hy)\Big)\Big) = \emptyset,$$

pour $h \in]0, h_0[$.

Corollaire 3.4 *Fixons $\alpha < \beta$ tel que :*

$$[\alpha,\beta] \cap \sigma\left(p^w\Big(y, D_y + \frac{\omega\times y}{2}\Big)\right) = \emptyset. \tag{3.2}$$

On a :

$$[\alpha,\beta] \cap \sigma_{ess}\left(P^w\Big(hy, D_y + \frac{\omega\times y}{2} + A(hy); h\Big)\right) = \emptyset, \textit{ pour } h \textit{ assez petit}. \tag{3.3}$$

Théorème 3.5 *On suppose que α,β vérifie (3.2), alors pour $f \in C_0^\infty((\alpha,\beta);\mathbb{R})$ il existe une suite de nombres réels $(A_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ telle que*

$$tr\Big(f(P(h))\Big) \sim h^{-n}\sum_{k=0}^{+\infty} A_k(f)h^k \qquad (h \searrow 0), \tag{3.4}$$

avec

$$A_0(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E^*} \int_{\mathbb{R}^n_x} \sum_{k\geqslant 1} f\Big((1+\varphi(x))\lambda_k(\xi) + \psi_0(x)\Big) dx d\xi. \tag{3.5}$$

Ici $(\lambda_k(\xi))_{k\geqslant 1}$, *désignent les valeurs propres de Floquet associées à* $P = p^w(y, D_y + \frac{\omega \times y}{2})$.

Chapitre V

Formule de trace pour des opérateurs périodiques avec perturbations dépendant d'une grande constante de couplage

1 Hypothèses et résultats.

Soit $a(y)$ une fonction C^∞ à valeurs matricielles réelles telle que :

$$a(y) = a(y)^*, \forall y \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

$$a(y+\gamma) = a(y), \forall \gamma \in \Gamma, \tag{1.2}$$

$$\exists C > 0 \quad \textit{tel que} \quad \langle a(y)\omega, \omega\rangle \geq \frac{1}{C}||\omega||^2, \ \ \forall \omega \in \mathbb{C}^n. \tag{1.3}$$

Soient $p(x), (g_i(x))_{1\leq i\leq 3} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ tels que :

$$p(x+\gamma) = p(x), \forall \gamma \in \Gamma, \tag{1.4}$$

$$g_i(x) > 0, \textit{quel que soit } x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

Il existe $\phi_{j,i} \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{R})$ tel que pour tout entier $N \geq 0$, il existe $r_N(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que

$$g_i(x) = \sum_{j=0}^{N} \phi_{j,i}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta-j} + r_N(x), \ \ \textit{pour} \ \ |x| \geqslant 1, \ \ i = 1,2,3 \tag{1.6}$$

où

$$|\partial_x^\beta r_N(x)| \leqslant C_\beta(1+|x|)^{-|\beta|-N-\delta-1}, \ \ \forall \beta.$$

Ici δ est une constante strictement positive et $\phi_{0,i} > 0, i = 1,2,3$.

On considère les formes quadratiques suivantes :

$$(A_0u, u) = \int_{\mathbb{R}^n_y} \Big(\langle a(y)\nabla u(y), \nabla u(y)\rangle + p(y)|u(y)|^2\Big)dy, \tag{1.7}$$

$$(A_\lambda u, u) = \int_{\mathbb{R}^n_y} \Big((1+\lambda g_1(y))\langle a(y)\nabla u(y), \nabla u(y)\rangle + ((1+\lambda g_2(y))p(y) + \lambda g_3(y))|u(y)|^2\Big)\, dy, \tag{1.8}$$

définies sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$(ici $\varphi_1(x)$ est une fonction qui a les mêmes propriétés que $\varphi(x)$). D'après les hypothèses $(\mathbf{H_3})$,((1.1)-(1.5)) les formes quadratiques A_0, A_λ sont semi-bornées inférieurement. Il est facile de voir que les opérateurs associés :

$$P_0 = \nabla^* a(y)\nabla + p(y), \tag{1.9}$$

$$P_\lambda = \nabla^* a(y)\nabla + p(y) + \lambda\Big(\nabla^* g_1(y)a(y)\nabla + g_2(y)p(y) + g_3(y)\Big), \quad (\lambda \nearrow +\infty) \tag{1.10}$$

sont essentiellement auto-adjoints de domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$.

On considère l'opérateur $P_0 = \nabla^* a(y)\nabla + p(y)$ sur $\mathbb{R}^n$, on note par P_ξ l'opérateur auto-adjoint non borné sur H_ξ associé à P_0, $(\lambda_k(\xi))_{k\geq 1}$ les valeurs propres de P_ξ comptées avec leurs multiplicités que l'on range par ordre croissant. D'après la théorie de Floquet (voir chapitre III), le spectre $\sigma(P_0)$ de P_0 est la réunion de bandes J_k

$$\sigma(P_0) = \sigma_{ess}(P_0) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} J_k \quad avec \quad J_k = \lambda_k(\mathbb{R}^n/\Gamma^*). \tag{1.11}$$

Lemme 1.1

$$\sigma_{ess}(P_\lambda) = \sigma_{ess}(P_0) = \sigma(P_0).$$

Preuve. D'après l'identité de la résolvante, on a :

$$\begin{aligned}(i+P_\lambda)^{-1} - (i+P_0)^{-1} &= (i+P_0)^{-1}\,(P_\lambda - P_0)\,(i+P_\lambda)^{-1} \\ &= (i+P_0)^{-1}G(y)(i+P_\lambda)^{-1},\end{aligned} \tag{1.12}$$

avec $G(y) = \lambda\Big(\nabla^* g_1(y)a(y)\nabla + g_2(y)p(y) + g_3(y)\Big)$. Comme $G(y)$ est un opérateur différentiel d'ordre deux à coefficients C^∞ et qui converge vers zéro à l'infini, alors les arguments de la preuve du lemme 1.1 du chapitre précédent montrent que $\Big[(i+P_\lambda)^{-1} - (i+P_0)^{-1}\Big]$ est compact . Maintenant, en appliquant le théorème de Weyl on obtient $\sigma_{ess}(P_\lambda) = \sigma_{ess}(P_0)$.

On fixe un intervalle $[E_1, E_2]$ disjoint du spectre de P_0, donc la perturbation crée des valeurs propres isolées et de multiplicités finies dans l'intervalle $[E_1, E_2]$ et pour $f \in C_0^\infty((E_1, E_2);\mathbb{R})$; $f(P_\lambda)$ est un opérateur de classe trace.

Théorème 1.2 *Soit $f \in C_0^\infty((E_1, E_2), \mathbb{R})$. Sous les hypothèses* (1.1)-(1.6), *il existe une suite de nombres réels $(a_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ telle que*

$$tr\Big(f(P_\lambda)\Big) \sim \lambda^{\frac{n}{\delta}} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f)\lambda^{-\frac{k}{\delta}}, \quad \lambda \nearrow +\infty. \tag{1.13}$$

Si $\phi_{0,1} = \phi_{0,2}$ alors,

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\int_{E^*\times\mathbb{R}_x^n} \sum_{k\geq 1} f\left((1+\phi_{0,1}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta})\lambda_k(\xi) + \phi_{0,3}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta}\right) dxd\xi \\ &= \int\int_{\mathbb{R}_x^n\times\mathbb{R}_t} f\left((1+\phi_{0,1}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta})t + \phi_{0,3}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta}\right) d\rho(t)dx. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Ici $\rho(t)$ désigne la densité d'états associée à l'opérateur $P_0 = \nabla^* a(y)\nabla + p(y)$.

Remarque 1.3 *Le théorème 1.2 reste vrai si $g_3(x) = 0$ et*

$$inf \sigma_{ess}(P_0) \geqslant \eta > 0. \tag{1.15}$$

En effet dans la démonstration on utilise le fait que : $\forall C > 0, \exists \epsilon > 0, h_0 > 0$ tel que

$$inf_{\varphi\in C_0^\infty(B(\epsilon\lambda^{\frac{1}{\delta}}))} (P_\lambda\varphi, \varphi) \geqslant C||\varphi||^2, \forall h \in]0, h_0]. \tag{1.16}$$

Ceci nous permet de considérer le comportement de $g_i(x)$ simplement dans la zone $\mathbb{R}^n \backslash B(\epsilon\lambda^{\frac{1}{\delta}}) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \geqslant \epsilon\lambda^{\frac{1}{\delta}}\}$ pour ϵ assez petit, or d'après (1.6) *dans $\mathbb{R}^n \backslash B(\epsilon\lambda^{\frac{1}{\delta}})$, $g_i(x)$ s'écrit sous la forme $\varphi_i(hx; h)$ avec $h = \lambda^{-\frac{1}{\delta}}$ et donc on peut appliquer le théorème 1.3. Maintenant il suffit de vérifier que* (1.16) *reste vrai si $g_3(x) = 0$ et* (1.15) *est vérifié.*

Idée de la démonstration du théorème 1.2. Pour démontrer le théorème 1.2, nous établirons une réduction dont le but est de ramener l'étude dans la limite de grande constante de couplage $\lambda \nearrow +\infty$ à celle dans le cas semi-classique $h = \lambda^{-\frac{1}{\delta}} \searrow 0$ via la formule

$$tr\Big(f(P_\lambda)\Big) = tr\Big(f(\widetilde{P}_h)\Big) + \mathcal{O}(h^\infty), \qquad (h \searrow 0). \tag{1.17}$$

Où, $\widetilde{P}_h = P_0 + \nabla^*\varphi_1(hy, h)a(y)\nabla + \varphi_2(hy, h)p(y) + \varphi_3(hy, h)$ et

$$\varphi_i(y, h) = \varphi_{0,i}(y) + h\varphi_{1,i}(y) + ... + h^j\varphi_{j,i}(y) + ... \tag{1.18}$$

est un développement asymptotique en puissance de h, dont les coefficients sont des fonctions uniformément bornées en y ainsi que ses dérivées. L'idée principale pour démontrer (1.17) est

(1) D'après l'hypothèse (1.5) et (1.6), il résulte que pour tout $C > 0$ il existe $\lambda_C > 0$ il existe $\lambda_C >> 1$ tel que $\lambda > \lambda_C$ l'ensemble

$$\Big\{(y, \xi) \in \mathbb{R}^{2n};\ \ |y| < C\ \ et\ \ p(y, \xi) \in [E_1, E_2]\Big\} = \emptyset$$

où, $p(y,\xi)$ est le symbole de l'opérateur P_λ. Donc modulo une quantité $\mathcal{O}(\lambda^{-\infty})$ la trace de l'opérateur $f(P_\lambda)$ pour $f\in C^\infty((E_1,E_2);\mathbb{R})$ ne dépend que du comportement de $g_i(y)$ à l'infini.

(2) D'autre part, d'après l'hypothèse (1.6) $\lambda g_i(y)=\varphi_i(hy,h)$ où $\varphi_i(y,h)$ satisfait (1.18) et $\varphi_{j,i}(y)=\phi_{j,i}(\frac{y}{|y|})|y|^{-\delta-j}$, $i=1,2,3$, pour $|y|>>1$.

Dans la section suivante, on construit l'opérateur de référence semi-classique

$$\widetilde{P}_h := P_0+\nabla^*\varphi_1(hy,h)a(y)\nabla+\varphi_2(hy,h)p(y)+\varphi_3(hy,h)$$

où $\varphi_i(y,h)$ satisfait (1.18). On utilise tout d'abord la formule de Helffer-Sjöstrand

$$f(P_\lambda)-f(\widetilde{P}_h)=-\frac{1}{\pi}\int\overline{\partial}\widetilde{f}(z)\left[(z-P_\lambda)^{-1}-(z-\widetilde{P}_h)^{-1}\right]L(dz). \tag{1.19}$$

Ensuite, à l'aide de la formule de résolvante et la construction de $\varphi_i(hx;h)$, on peut montrer l'identité cruciale suivante

$$\begin{aligned}\left[(z-P_\lambda)^{-1}-(z-\widetilde{P}_h)^{-1}\right]&=A_1(z)+A_2(z)(z-\widetilde{P}_h)^{-1}+(z-P_\lambda)^{-1}A_3(z)\\&\quad+(z-P_\lambda)^{-1}A_4(z)(z-\widetilde{P}_h)^{-1};\ \Im(z)\neq0,\end{aligned}\tag{1.20}$$

où $z\longmapsto A_j(z);\ j=1,2,3,4$ sont holomorphes dans un voisinage complexe Ω de $[E_1,E_2]$. De plus, les opérateurs $A_2(z),A_3(z)$ et $A_4(z)$ sont de classe trace et $||A_j(z)||_{tr}=\mathcal{O}(h^\infty),\ j=2,3,4$. Finalement, en substituant (1.20) dans (1.19) et en utilisant le fait que $\overline{\partial}_z\widetilde{f}(z)=\mathcal{O}(|\Im(z)|^\infty)$, $||(z-P_\lambda)^{-1}||=\mathcal{O}(|\Im(z)|^{-1})$ et $||(z-\widetilde{P}_h)^{-1}||=\mathcal{O}(|\Im(z)|^{-1})$, on obtient (1.17).

2 Constructions de l'opérateur de référence semi-classique $\widetilde{P}_h$

Début de la démonstration du théorème 1.2. On pose $\lambda=h^{-\delta}$ où δ est la constante introduite dans 1.6. Pour $M>0$ fixé, on note :

$$\Omega_{M,i}(h)=\left\{x\in\mathbb{R}^n;\ \ h^{-\delta}g_i(x)>M\right\},\ \ i=1,2,3. \tag{2.1}$$

Puisque $\phi_{0,i}>0; i=1,2,3$ est continue sur la sphère unité donc il existe deux constantes $C_1,C_2>0$ satisfaisant :

$$0<C_1<\Big(\min_{\mathbb{S}^{n-1}}\phi_{0,i}\Big)^{\frac{1}{\delta}}<\Big(\max_{\mathbb{S}^{n-1}}\phi_{0,i}\Big)^{\frac{1}{\delta}}<C_2. \tag{2.2}$$

D'après (1.5) et (1.6) il existe $h_0>0$ tel que :

$$B\Big(0,C_1M^{-1/\delta}h^{-1}\Big)\subset\Omega_{M,i}(h)\subset B\Big(0,C_2M^{-1/\delta}h^{-1}\Big),\ \forall\ 0<h\leq h_0 \tag{2.3}$$

quand $M^{1/\delta}h>0$ assez petit. Ici $B(0,r)$ désigne la boule de centre zéro et de rayon r.

Soit $\chi(x)\in C_0^\infty\Big(B(0,C_1M^{-1/\delta});[0,1]\Big)$ satisfait $\chi=1$ au voisinage de zéro. En utilisant les hypothèses (1.5) et (1.6) et pour un choix convenable de M on peut construire deux fonctions $W_{h,i}$ et φ_i de sorte que :

(i) $\varphi_i(x;h), W_{h,i}(x)$ sont C^∞ en x pour $h \in]0, h_0[$.

(ii) $\varphi_i(x;h) = \Big[1-\chi(x)\Big]h^{-\delta}g_i(\frac{x}{h}) + M\chi(x)$ *pour* $i = 1,2,3$

(iii) $W_{h,i}(x) = h^{-\delta}g_i(x) - \varphi_i(hx;h) = \chi(hx)(h^{-\delta}g_i(x) - M)$ *pour* $i = 1,2,3.$

D'après la construction de φ_i et $W_{h,i}$, on obtient :

Lemme 2.1 *Les deux fonctions $W_{h,i}$ et φ_i sont C^∞ et vérifient les propriétés suivantes :*

$$supp\, W_{h,i} \subset B\Big(0, C_1 M^{-1/\delta}h^{-1}\Big) \subset \Omega_{M,i}(h) \tag{2.4}$$

$$\varphi_i(hx;h) \geq \frac{M}{2};\ \forall x \in \Omega_{M/2,i}(h). \tag{2.5}$$

$$|\partial_x^\beta \varphi_i(x;h)| \leq\ C_\beta;\ \forall \beta\ (C_\beta\, est\, indépendant\, de\, h\, dans\,]0, h_0[). \tag{2.6}$$

D'autre part, on peut déduire d'après (1.6) que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_N, R_N(., h) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ uniformément bornée ainsi que ses dérivées pour tout $h \in]0, h_0]$, tel que :

$$\varphi_i(x;h) = \sum_{j=0}^{N} \varphi_{j,i}(x)h^j + h^{N+1}R_N(x,h)\ \ dans\ \ \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n}) \tag{2.7}$$

avec

$$\varphi_{0,i}(x) = \Big(1-\chi(x)\Big)\phi_{0,i}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta} + M\chi(x);\ \ i = 1,2,3.$$

Preuve. Puisque $W_{h,i}(x) = \chi(hx)\underbrace{(h^{-\delta}g_i(x) - M)}_{>0}$ alors $supp\, W_{h,i} \subset supp\chi(hx)$ et le fait que $supp\,\chi(x) \subset B(0, C_1 M^{-1/\delta})$ implique que $supp\,\chi(hx) \subset B(0, C_1M^{-1/\delta}h^{-1})$, en utilisant (2.3) on obtient (2.4). (ii) combinée avec (2.1) et puisque $x \in \Omega_{M/2,i}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi_i(hx;h) &= \Big[1-\chi(hx)\Big]h^{-\delta}g_i(x) + M\chi(hx) \\
&> \Big(1-\chi(hx)\Big)\frac{M}{2} + \frac{M}{2}\chi(hx) + \frac{M}{2}\chi(hx) \\
&= \frac{M}{2} + \frac{M}{2}\chi(hx) > \frac{M}{2}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

On peut écrire (1.6) sous la forme :

$$\begin{aligned}
\lambda g_i(x) &= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \phi_{j,i}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta-j};\quad |x| >> 1 \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_{j,i}\left(\frac{\lambda^{-\frac{1}{\delta}}x}{\lambda^{-\frac{1}{\delta}}|x|}\right)|\lambda^{-\frac{1}{\delta}}x|^{-\delta-j}\lambda^{-\frac{j}{\delta}}; \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_{j,i}\left(\frac{hx}{h\,|x|}\right)|h\,x|^{-\delta-j}h^j = \varphi(hx;h)
\end{aligned}$$

où $\varphi_i(x,h)$ vérifie (2.7) avec $\varphi_{j,i}(x) = \phi_{j,i}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta};\ \ i = 1,2,3$ pour $|x| >> 1$. En utilisant (ii), on obtient :

$$\varphi_{0,i}(x) = \Big(1-\chi(x)\Big)\phi_{0,i}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta} + M\chi(x); \quad i=1,2,3$$

Lemme 2.2 *Si* $\varphi_{0,i}(x) < M$ *alors* $\varphi_{0,i}(x) = \phi_{0,i}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta}$; $i=1,2,3.$

Preuve. Soit $x \in supp\chi$, en utilisant (2.2) on obtient : $\phi_{0,i}\left(\frac{x}{|x|}\right) > C_1^\delta$ et par suite $\phi_{0,i}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta} > C_1^\delta|x|^{-\delta}$ et le fait que $supp\,\chi(x) \subset B(0, C_1M^{-1/\delta})$ montre que

$$\phi_{0,i}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta} > C_1^\delta|x|^{-\delta} > M$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\varphi_{0,i}(x) &= \Big(1-\chi(x)\Big)\phi_{0,i}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta} + M\chi(x)\\ &\geqslant \Big(1-\chi(x)\Big)M + M\chi(x) = M, \quad \forall x \in supp\chi.\end{aligned}$$

Donc si $\varphi_{0,i}(x) < M$ on a $x \notin supp\,\chi$ de plus $\varphi_{0,i}(x) = \phi_{0,i}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta}$.

$\square$

Soit $b \in C^\infty(\mathbb{R}; [\frac{M}{3}; +\infty))$ satisfait $b(t) = t$ pour tout $t \geq \dfrac{M}{2}$. On définit

$$F_{i,1}(x;h) := b\Big(\varphi_i(hx;h)\Big) \ \ et \ \ F_{i,2}(x;h) := b\left(h^{-\delta}g_i(x)\right)\ ; \ \ i=1,2,3; \ \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Dans la suite on note par K_{F_l,F_i,F_j} l'opérateur :

$$K_{F_l,F_i,F_j} = \nabla^*(1+F_l(y))a(y)\nabla + (1+F_i(y))p(y) + F_j(y).$$

Soit $\widetilde{f}$ une extension presque analytique de f (la fonction introduite dans le théorème 1.2) telle que :

(i) $\widetilde{f}(z) \in C_0^\infty(\mathbb{C}), supp\widetilde{f} \subset \mathcal{V}$ ($\mathcal{V}$ *voisinage complexe de* $]\alpha,\beta[$)

(ii) $\widetilde{f}(z) = f(z)$ pour tout z dans $\mathbb{R}$

(iii) $\overline{\partial}\widetilde{f}(z) = \mathcal{O}(|\Im(z)|^N)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Remarque 2.3 (1). *Soit* Ω *un petit voisinage borné de* $supp\widetilde{f}$. *Pour* $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ *et* $z \in \Omega$ *on a :*

$$\Re\Big((K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}} - z)u, u\Big) \tag{2.9}$$

$$= \Big((1+F_{i,1}(y))a(y)\nabla u, \nabla u\Big) + \Big((1+F_{i,2}(y))p(y)u,u\Big) + \Big(F_{i,3}(y)u,u\Big) - \Re z|u|^2 \geqslant$$

$$M\Big((-\Delta+p(y))u,u\Big) + \Big(F_{i,3}(y)u,u\Big) - \Re z|u|^2 \geqslant \Big(\frac{M}{C} - \Re z\Big)|u|^2.$$

Pour $i=1,2$ (*on rappelle que* $F_{i,1}, F_{i,2}, F_{i,3} \geqslant \frac{M}{3}$). *Il est clair que l'inégalité précédente reste vraie si* $F_{i,3} = 0$ *et* (1.15) *est vérifié. Comme* Ω *est borné alors pour* M *très grand la fonction définie par* $z \longmapsto (z - K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}})^{-1}, i=1,2$ *est analytique dans* Ω.
Ce choix de M *implique que*

• $(1+\varphi_1(x;h))\lambda_k(\xi)+\varphi_3(x;h)\in[E_1,E_2]$, *alors* $\varphi_{0,i}(x)<M$, $\forall i=1,3$ *et* $h\in(0,h_0]$ (2). *Par construction de* $F_{i,j}$ *et d'après* (2.6) *on a :*

$$\partial_x^\alpha F_{i,j}(x;h)=\mathcal{O}_\alpha(h^{-\delta});\forall\alpha.$$

Puisque le support de $\left[h^{-\delta}g_i(x)-F_{i,2}(x;h)\right]$ *et de* $\left[\varphi_i(hx;h)-F_{i,1}(x;h)\right]$ *est contenu dans le complémentaire de* $\Omega_{M/2,i}(h)$ *et le support de* $W_{h,i}$ *est dans* $\Omega_{M,i}(h)$ *alors*

$$dist\Big(supp(W_{h,i}),supp\left[h^{-\delta}g_i(x)-F_{i,2}(x;h)\right]\Big)\geq dist\Big(\Omega_{M,i}(h),\Omega^c_{M/2,i}(h)\Big)$$

et

$$dist\Big(supp(W_{h,i}),supp\Big[\varphi_i(hx;h)-F_{i,1}(x;h)\Big]\Big)\geqslant dist\Big(\Omega_{M,i}(h),\Omega^c_{M/2,i}(h)\Big)$$

le fait que $\Omega_{M,i}(h)\cap\Omega^c_{M/2,i}(h)=\emptyset$ *entraine qu'il existe deux constantes* $a_1(M),a_2(M)>0$ *qui ne dépendent que de* M *tel que :*

$$\begin{aligned}&dist\Big(supp(W_{h,i}),supp\left[h^{-\delta}g_i(x)-F_{i,2}(x;h)\right]\Big)\geq dist\Big(\Omega_{M,i}(h),\Omega^c_{M/2,i}(h)\Big)\geqslant\frac{a_1(M)}{h}\\&dist\Big(supp(W_{h,i}),supp\Big[\varphi_i(hx;h)-F_{i,1}(x;h)\Big]\Big)\geqslant dist\Big(\Omega_{M,i}(h),\Omega^c_{M/2,i}(h)\Big)\geqslant\frac{a_2(M)}{h}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Soit $\widetilde{P}_h=P_0+\nabla^*\varphi_1(hy,h)a(y)\nabla+\varphi_2(hy,h)p(y)+\varphi_3(hy,h)$,

Proposition 2.4 *Pour tout* $z\in\Omega\setminus\left[\sigma(P_\lambda)\cup\sigma(\widetilde{P}_h)\right]$, *on a :*

$$(z-P_\lambda)^{-1}-(z-\widetilde{P}_h)^{-1}=(z-K_{F_{2,1},F_{2,2},F_{2,3}})^{-1}(P_\lambda-\widetilde{P}_h)(z-K_{F_{1,1},F_{1,2},F_{1,3}})^{-1}\tag{2.11}$$

$$-(z-K_{F_{2,1},F_{2,2},F_{2,3}})^{-1}(P_\lambda-\widetilde{P}_h)(z-K_{F_{1,1},F_{1,2},F_{1,3}})^{-1}(\widetilde{P}_h-K_{F_{1,1},F_{1,2},F_{1,3}})(z-\widetilde{P}_h)^{-1}$$

$$+(z-P_\lambda)^{-1}(P_\lambda-K_{F_{2,1},F_{2,2},F_{2,3}})(z-K_{F_{2,1},F_{2,2},F_{2,3}})^{-1}(P_\lambda-\widetilde{P}_h)(z-K_{F_{1,1},F_{1,2},F_{1,3}})^{-1}$$

$$-(z-P_\lambda)^{-1}(P_\lambda-K_{F_{2,1},F_{2,2},F_{2,3}})(z-K_{F_{2,1},F_{2,2},F_{2,3}})^{-1}(P_\lambda-\widetilde{P}_h)(z-K_{F_{1,1},F_{1,2},F_{1,3}})^{-1}\times$$

$$\times(\widetilde{P}_h-K_{F_{1,1},F_{1,2},F_{1,3}})(z-\widetilde{P}_h)^{-1}=:(1)+(2)+(3)+(4).$$

Preuve. En utilisant l'identité de la résolvante, une substitution de

$$\begin{aligned}(z-P_\lambda)^{-1}&=(z-K_{F_{2,1},F_{2,2},F_{2,3}})^{-1}\\&\quad+(z-P_\lambda)^{-1}\left[P_\lambda-K_{F_{2,1},F_{2,2},F_{2,3}}\right](z-K_{F_{2,1},F_{2,2},F_{2,3}})^{-1},\end{aligned}\tag{2.12}$$

et

$$\begin{aligned}(z-\widetilde{P}_h)^{-1}&=(z-K_{F_{1,1},F_{1,2},F_{1,3}})^{-1}\\&\quad-(z-K_{F_{1,1},F_{1,2},F_{1,3}})^{-1}\left[\widetilde{P}_h-K_{F_{1,1},F_{1,2},F_{1,3}}\right](z-\widetilde{P}_h)^{-1}\end{aligned}\tag{2.13}$$

à droite dans la formule

$$(z-P_\lambda)^{-1}-(z-\widetilde{P}_h)^{-1}=(z-P_\lambda)^{-1}\left[P_\lambda-\widetilde{P}_h\right](z-\widetilde{P}_h)^{-1}\tag{2.14}$$

donne (2.11).

□

Pour $z \in \Omega$, $\Im(z) \neq 0$, on pose

$$G(z) = (z - P_\lambda)^{-1} - (z - \widetilde{P}_h)^{-1} - (z - K_{F_{2,1},F_{2,2},F_{2,3}})^{-1}\left[P_\lambda - \widetilde{P}_h\right](z - K_{F_{1,1},F_{1,2},F_{1,3}})^{-1}. \qquad (2.15)$$

Proposition 2.5 *L'opérateur $G(z)$ est de classe trace, de plus il satisfait l'estimation suivante*

$$||G(z)||_{tr} = \mathcal{O}\left(|\Im(z)|^{-2}h^\infty\right), \qquad (2.16)$$

uniformément pour $z \in \Omega$ avec $\Im(z) \neq 0$.

Début de la preuve du proposition 2.5. D'après la remarque 2.3.1 le premier terme du second membre de l'égalité (2.11) est analytique dans un voisinage de *supp*$\widetilde{f}$ donc par intégration par partie on a :

$$-\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)(z - K_{F_{2,1},F_{2,2},F_{2,3}})^{-1}(P_\lambda - \widetilde{P}_h)(z - K_{F_{1,1},F_{1,2},F_{1,3}})^{-1}L(dz) = 0$$

ce qui entraîne

Lemme 2.6

$$tr\Big(f(P_\lambda)\Big) - tr\Big(f(\widetilde{P}_h)\Big) = -\frac{1}{\pi}tr\left(\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)(2)(Ldz)\right) \qquad (2.17)$$

$$-\frac{1}{\pi}tr\left(\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)(3)(Ldz)\right) - \frac{1}{\pi}tr\left(\int \overline{\partial}\,\widetilde{f}(z)(4)(Ldz)\right).$$

□

D'après (2.17) *et le théorème 1.3 pour démontrer le théorème 1.2 il suffit de démontrer la proposition suivante :*

Proposition 2.7 *Sous les hypothèses* (1.1)-(1.6) *on a*

$$tr\left(f(P_\lambda)\right) = tr\Big(f(\widetilde{P}_h)\Big) + \mathcal{O}(h^\infty), \qquad (h \searrow 0). \qquad (2.18)$$

Début de la démonstration de la proposition 2.7. La preuve repose sur quelques propositions. On rappelle que Ω est un voisinage complexe de *supp*$\widetilde{f}$, h_0 est une constante introduite pour la construction de $\varphi_i(x;h), W_{h,i}(x)$.

Proposition 2.8 *Soient $G_1(x;h), G_2(x;h) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ pour $h \in]0, h_0[$* (h_0 *est une constante positive assez petit*) *tels que :*

(*i*) $\partial_x^\alpha G_i(x;h) = h^{-\epsilon}\mathcal{O}(1)$, (*où ϵ est une constante indépendante de α*).

(*ii*) $supp\, G_1(x;h) \subset B(\mathcal{O}(1)h^{-1})$ *et* $dist\Big(supp\, G_1, supp\, G_2\Big) \geqslant Ch^{-1}$.

Fixons m dans $\mathbb{Z}$ et posons

$$N(m) = \begin{cases} [\frac{m}{2}] + 1, & m \geq 0 \\ [-\frac{m}{2}], & m \leq -2 \\ 1, & m = -1 \end{cases}$$

Alors pour tout entier k, L dans $\mathbb{N}$ et tout entier m dans $\mathbb{Z}$ il existe $C = C(m)$, $\widetilde{C} = \widetilde{C}(m, k, l)$ tel que pour tout $z \in \Omega, h \in]0, h_0]$ et tout $(\psi_i)_{i=1,2} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $||\partial^\alpha \psi_i||_{L^\infty} \leqslant \frac{1}{C(m)}$ pour $1 \leqslant |\alpha| \leqslant |m| + 2$ et $\psi_1 = \psi_2$ sur supp G_1, on a :

$$\left\| exp(\psi_1(x)) G_1(x,h)(K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}} - z)^{-1} exp(-\psi_2(x)) \right\|_{\mathcal{L}(H^m, H^{m+2})} \leq C(m) h^{-(\epsilon + N(m))\delta} \tag{2.19}$$

on désigne par $[x]$ le plus grand entier $\leqslant x$.

Preuve. La formule

$$\begin{aligned} \exp(\psi_2(x)) \left(K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}} - z \right) exp(-\psi_2(x)) &= \nabla^* \psi_2.(1 + F_{i,1}) a(x) \nabla \psi_2 \\ +\nabla^* \psi_2.(1 + F_{i,1}) a \nabla + \nabla.(1 + F_{i,1}) a \nabla \psi_2, \end{aligned} \tag{2.20}$$

et le fait que $\nabla^* \psi_2.(1 + F_{i,1}) a \nabla + \nabla.(1 + F_{i,1}) a \nabla \psi_2$ est antisymétrique entraînent :

$$\Re \Big((exp\psi_2(x)(K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}} - z) exp{-}\psi_2(x) u, u) \Big) = \tag{2.21}$$

$$\Re \Big((K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}} - z) u, u) \Big) + \Big(\nabla^* \psi_2.(1 + F_{i,1}) a(x) \nabla \psi_2) u, u) \Big) \geq \frac{M}{2C} ||u||^2_{L^2}.$$

Pour $||\nabla \psi_2||_{L^\infty}$ assez petit, (2.9) et (2.21), impliquent :

$$\| exp(\psi_2(x)) u \|_{L^2} \leqslant \frac{2C}{M} \left\| exp(\psi_2(x))(K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}} - z) u \right\|_{L^2}. \tag{2.22}$$

En utilisant (1.3) et la remarque 2.3(2) on obtient par les égalités elliptiques que pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe $a_{m,M}$ (constante qui ne dépend que de m et M) tel que pour tout $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^n)$,

$$||u||_{H^{m+2}(\mathbb{R}^n)} \leqslant a_{m,M} \Big(\| \nabla^*.(1 + F_{i,1}) a(x) \nabla u \|_{H^m(\mathbb{R}^n)} + \mathcal{O}(h^{-(m+1)\delta}) ||u||_{L^2} \Big). \tag{2.23}$$

(2.23) combiné avec la formule

$$exp(\psi_2(x)) \nabla^*.(1 + F_{i,1}) a(x) \nabla exp(-\psi_2(x)) = \nabla^*.(1 + F_{i,1}) a(x) \nabla \tag{2.24}$$

$$+\nabla^* \psi_2.(1 + F_{i,1}) a(x) \nabla \psi_2 - \nabla^* \psi_2.(1 + F_{i,1}) a \nabla - \nabla^*.(1 + F_{i,1}) a \nabla \psi_2$$

entraînent qu'il existe $b_{m,M}$ tel que pour tout $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$||u||_{H^{m+2}(\mathbb{R}^n)} \leqslant b_{m,M} \Big(\left\| exp(\psi_2(x))(\nabla^*.(1 + F_{i,1}) a(x) \nabla) exp(-\psi_2(x)) u \right\|_{H^m} + \tag{2.25}$$

$$\mathcal{O}(h^{-\delta}) \sup_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m+2} ||\partial^\alpha \psi_2||_{L^\infty} ||u||_{H^{m+1}} + \mathcal{O}(h^{-(m+1)\delta})||u||_{L^2}\Big).$$

Donc pour $b_{m,M} \sup_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m+2} ||\partial^\alpha\psi_2||_{L^\infty}$ assez petit (2.25) implique qu'il existe $C = C(m, M)$ tel que

$$\begin{aligned} ||u||_{H^{m+2}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_{m,M}\Big(\Big\|&exp(\psi_2(x))\nabla^*(1+F_{i,1}).a(x)\nabla exp(-\psi_2(x))u\Big\|_{H^m} \\ &+ \mathcal{O}(h^{-(m+2)\delta})||u||_{L^2}\Big), \end{aligned} \tag{2.26}$$

pour éliminer le terme $||u||_{H^{m+1}}$nous avons utilisé l'inégalité ; $\forall\epsilon > 0$, $\forall u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$||u||_{H^{m+1}} \leqslant \epsilon||u||_{H^{m+2}} + \frac{\mathcal{O}(1)}{\epsilon^{m+1}}||u||_{L^2}.$$

Comme $\partial_x^\alpha F_{i,j}(x,h) = \mathcal{O}(h^{-\delta})\forall\alpha$, alors à partir de (2.26) on obtient :

$$\begin{aligned} ||u||_{H^{m+2}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(m,M)\Big(\Big\|&exp(\psi_2(x))(K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}} - z)exp(-\psi_2(x))\Big\|_{H^m} \\ &+\mathcal{O}(h^{-\delta})||u||_{H^m} + \mathcal{O}(h^{-(m+2)\delta})||u||_{L^2}\Big), \end{aligned} \tag{2.27}$$

et par induction par rapport à m on trouve que pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe $\widetilde{C}(m, N)$ tel que

$$||u||_{H^{m+2}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \widetilde{C}(m,N)h^{-N(m)\delta}\Big(\Big\|exp(\psi_2(x))(K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}} - z)exp(-\psi_2(x))\Big\|_{H^m} + ||u||_{L^2}\Big). \tag{2.28}$$

Comme $\psi_1(x) = \psi_2(x)$ sur $supp\, G_1$ et $\partial_x^\alpha G_1(x,h) = \mathcal{O}(h^{-\epsilon}), \forall\alpha$ alors

$$\Big\|exp(\psi_1 - \psi_2)G_1(.;h)u\Big\|_{H^{m+2}} = \mathcal{O}(h^{-\epsilon})||u||_{H^{m+2}}. \tag{2.29}$$

En utilisant (2.22), (2.28) et (2.29) on obtient :

$$\Big\|exp(\psi_2(x))G_1(x,h)(K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}} - z)^{-1}exp(-\psi_2(x))\Big\|_{\mathcal{L}(H^m,H^{m+2})} = \mathcal{O}\left(h^{-\epsilon-N(m)\delta}\right). \tag{2.30}$$

Remarque 2.9 (2.30) *reste vrai pour tout m dans $\mathbb{Z}$. En effet par dualité on obtient le cas $m \leqslant -2$ et par interpolation $m = -1$.*

Proposition 2.10 *Sous les hypothèses de la proposition 2.8 et pour tout $k, L \in \mathbb{N}$ il existe $\widetilde{C} = \widetilde{C}(m,k,L)$ tel que :*

$$\Big\|exp(\psi_1(x))G_1(x;h)(z - K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}})^{-1}G_2(x;h)exp(-\psi_2(x))\Big\|_{\mathcal{L}\left(H^m,H^{m+k}\right)} \leqslant \widetilde{C}h^L$$

quel que soit $z \in \Omega, h \in]0, h_0]$.

Preuve. On rappelle que $supp\, G_i$ est contenu dans la boule de centre zéro et de rayon $\mathcal{O}(1)h^{-1}$ et $dist(supp\,(G_1), supp\,(G_2)) \geqslant Ch^{-1}$.
Soient $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_k$ des fonctions de classe C^∞, bornées telle que :

(1) $G_1(x,h)\chi_1 = G_1(x,h)$

(2) $\chi_\nu \chi_{\nu-1} = \chi_{\nu-1}, \;\; 2 \leqslant \nu \leqslant k$

(3) $G_2(x,h)\chi_k = 0.$

Alors,

$$G_1(z-K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}})^{-1}G_2 = G_1\chi_1...\chi_k(z-K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}})^{-1}G_2 \tag{2.31}$$
$$= G_1\chi_1...\chi_{k-1}\Big[\chi_k,(z-K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}})^{-1}\Big]G_2$$
$$= G_1\chi_1...\chi_{k-1}(z-K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}})^{-1}\Big[K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}},\chi_k\Big](z-K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}})^{-1}G_2$$
$$= G_1(z-K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}})^{-1}\Big[K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}},\chi_1\Big]...(z-K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}})^{-1}\Big[K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}},\chi_k\Big](z-K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}})^{-1}G_2.$$

Ici $[.,.]$ est le commutateur de deux opérateurs $[A,B] = AB - BA$. D'après 2.30 et la remarque 2.9

$$exp(\psi_1(x))\Big[P_{F_i},\chi_\nu\Big](z-K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}})^{-1}exp(-\psi_2(x)) = \mathcal{O}\left(h^{-(N(m)\delta-\epsilon)}\right). \tag{2.32}$$

Dans $\mathcal{L}(H^m,H^{m+1})$. En utilisant (2.31), (2.32) on obtient :

$$\left\|exp(\psi_1(x))G_1(x,h)(z-K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}})^{-1}exp(-\psi_2(x))\right\|_{\mathcal{L}(H^m,H^{m+2})} = \mathcal{O}\left(h^{-\widetilde{N}(m,k)}\right). \tag{2.33}$$

Soient $0 < a_1 < a_2$ tels que

$$supp\, G_1(x,h) \subset B\left(0,\frac{a_1}{h}\right) \;\; et \;\; G_2(x,h) = 0 \, sur \, B\left(0,\frac{a_2}{h}\right).$$

On considère une fonction positive $\chi(t)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^+)$ telle que :

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leqslant a_1 \\ \tau & si \quad t \geqslant a_2 \end{cases} \quad Ici\, \tau \, est\, une\, constante > 0.$$

On suppose que les dérivées d'ordre non nul de χ sont assez petites en norme $L^\infty(\mathbb{R}^+)$. Pour $h \in]0,h_0[$, on pose :

$$\psi_h(x) = \frac{1}{h}\chi(hx).$$

D'après la construction de $\psi_h(x)$,(2.33) reste vrai si on remplace $\psi_2(x)$ par $\psi_2(x) - \psi_h(x)$. Comme $exp - \psi_h(x) = exp - \frac{\tau}{h}$ sur $supp\, G_2(.;h)$, on trouve

$$\left\|exp(\psi_1(x))G_1(.;h)(z-K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}})^{-1}exp(\psi_h-\psi_2)G_2(.;h)exp(-\psi_h)\right\|_{\mathcal{L}(H^m,H^{m+k})} \tag{2.34}$$

$$= \mathcal{O}\Big(h^{-\widetilde{N}(m,k)}exp(-\frac{\tau}{h})\Big).$$

Ce qui achève la démonstration de (2.19).

Pour $h > 0$, $z \in \Omega$, on note $K_i(x,y,z,h); i = 1,2,3$ le noyau de l'opérateur A_i

$$A_i = G_1(x;h)(z-K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}})^{-1}G_2(x;h); \;\; i = 1,2,3.$$

Comme dans [11, *proposition* 3.3], la proposition 2.8 implique :

Proposition 2.11 *Fixons $N \in \mathbb{N}$. Il existe $C = C(N)$ tel que pour tout $z \in \Omega, h \in]0, h_0]; |\alpha| \leqslant N, |\beta| \leqslant N$ on a :*

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K_i(x,y,z,h) = \mathcal{O}\left(h^\infty exp\Big[-\frac{1}{C}\Big(dist(x, supp\, G_1(x,.)) + dist(y, supp\, G_2(x,.))\Big]\right). \tag{2.35}$$

Preuve. On prend $\psi_1(x) = \psi_2(x) \pm \omega.x/C$ (C à choisir assez grand pour que ψ_1, ψ_2 satisfassent aux conditions de la proposition 2.10), $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$. Pour $s > \frac{n}{2}$ le noyau $K(x,y)$ d'un opérateur A de $\mathcal{L}(H^{-s}, H^s)$ est donné par la formule

$$K(x,y) = \int K(x,t)\delta(t-y)dt = \Big[A.\delta(.-y)\Big](x)$$

(δ est la distribution de Dirac).

D'après les inégalités de Sobolev, en considérant y comme paramètre, il existe une constante C_s (qui ne dépend que de s) telle que :

$$|K(x,y)| \leq C_s ||A||_{\mathcal{L}(H^{-s},H^s)} ||\delta(.-y)||_{H^{-s}}. \tag{2.36}$$

Comme $||\delta(.-y)||_{H^{-s}}$ est indépendant de y alors (quitte à remplacer C_s par $\widetilde{C}_s$) on obtient :

$$|K(x,y)| \leq C_s ||A||_{\mathcal{L}(H^{-s},H^s)} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{2.37}$$

En appliquant (2.36) à l'opérateur $exp\left(\pm\frac{\omega.c}{C}\right) A_i\, exp\left(\pm\frac{\omega.x}{C}\right)$ et en tenant compte de la proposition 2.10 on trouve que pour tout $s > \frac{n}{2}$ et tout entier $L \geq 0$, il existe $C(s,L)$ tel que

$$\left\| exp \pm \left(\frac{\omega.(x-y)}{C}\right) K_i(x,y,z,h)\right\| \leq C(s,L)h^L. \tag{2.38}$$

Du fait que $C(s,L)$ est indépendant de ω dans $\mathbb{S}^{n-1}$, on peut remplacer dans le membre à gauche de l'inégalité 2.38 $exp \pm \frac{\omega.(x-y)}{C}$ par $exp\frac{|x-y|}{2C}$. D'autre part sur $\Pi_x(supp\, K_i(x,y,z,h)) \subset supp\, G_1$, on a $|x-y| \geq dist(y, supp\, G_1)$, donc on aura

$$|K_i(x,y,z,h)| \leqslant C(s,L)h^L G_1(x;.)exp - \frac{1}{2C}d(y, supp\, G_1)$$

ce qui donne (2.35) pour $|\alpha| = |\beta| = N = 0$. (On rappelle que $G_1(.,h) = \mathcal{O}(h^{-\delta})$ et $G_1(.,h)$ est à support compact). Pour N quelconque on utilise l'opérateur

$$T_i^{\alpha,\beta} = (\partial_x - \omega)^\alpha exp(\omega.x)\, A_i\, exp(-\omega.x)(-\partial_x + \omega)^\beta.$$

$T_i^{\alpha,\beta}$ vérifie (2.35), car $(\partial_x - \omega) = \mathcal{O}(1)$ dans $\mathcal{L}(H^s, H^{s-|\alpha|})$. Maintenant il suffit de remarquer que le noyau associé à $T_i^{\alpha,\beta}$ est égal à $exp(\omega.(x-y))\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K_i(x,y,z,h)$.

Comme conséquence de la proposition 2.11 :

Corollaire 2.12 . *Pour* $(h,z) \in]0,h_0] \times \Omega$, $K_i(x,y,z,h)$ *est* C^∞ *en* (x,y) *dans* $\mathbb{R}^{2n}_{x,y}$.

Proposition 2.13 ([18]) *Soit* A *un opérateur dans* $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$. *On note* $K(x,y)$ *le noyau associé à* A. *On suppose que* $K(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ *et pour tout* α, β *tel que* $|\alpha|+|\beta| \leq 2n+1$ *on a* $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x,y) \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$. *Alors* A *est un opérateur à trace et on a :*

$$||A||_{tr} = tr(A^*A)^{1/2} \leq C_n \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 2n+1} \left\| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x,y) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})}.$$

(C_n *est une constante qui ne dépend que de* n *).*

Maintenant la proposition 2.13 implique :

Corollaire 2.14 *Soient* $G_1(.;h), G_2(.;h)$ *deux fonctions qui vérifient les hypothèses de la proposition 2.8 . Alors pour tout* $N \in \mathbb{N}$:

$$\left\| G_1(.;h)(z - K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}})^{-1} G_2(.;h) \right\|_{tr} = \mathcal{O}(h^N), \qquad (h \longrightarrow 0) \tag{2.39}$$

quel que soit $z \in \Omega$.

Fin de la preuve de (2.18). On rappelle que

$$\begin{aligned} P_\lambda - \widetilde{P}_h &= \nabla^* \Big(h^{-\delta} g_1(y) - \varphi_1(hy,h) \Big) a(y) \nabla + \Big(h^{-\delta} g_2(y) - \varphi_2(hy,h) \Big) p(y) \\ &\quad + \Big(h^{-\delta} g_3(y) - \varphi_3(hy,h) \Big) \\ &= \nabla^* W_{h,1}(y) a(y) \nabla + W_{h,2}(y) p(y) + W_{h,3}(y). \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_h - K_{F_{1,1},F_{1,2},F_{1,3}} &= \nabla^* \Big(\varphi_1(hy,h) - F_{1,1}(y) \Big) a(y) \nabla + \Big(\varphi_2(hy,h) - F_{1,2}(y) \Big) p(y) \\ &\quad + \varphi_3(hy,h) - F_{1,3}(y), \end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned} P_\lambda - K_{F_{2,1},F_{2,2},F_{2,3}} &= \nabla^* \Big(\lambda g_1(y) - F_{2,1}(y) \Big) a \nabla + \Big(\lambda g_2(y) - F_{2,2}(y) \Big) p(y) \\ &\quad + \lambda g_3(y) - F_{2,3}(y). \end{aligned} \tag{2.42}$$

En utilisant le fait que $[\nabla, \varphi] = (\nabla \varphi)$ on obtient :

$$P_\lambda - K_{F_{2,1},F_{2,2},F_{2,3}} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (\partial_{x_i} \partial_{x_j}) a_{i,j}(x;h) + \sum_{i \leq n} (\partial_{x_i}) a_i(x;h) + a_0(x;h), \tag{2.43}$$

et

$$\widetilde{P}_h - K_{F_{1,1},F_{1,2},F_{1,3}} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (\partial_{x_i} \partial_{x_j}) b_{i,j}(x;h) + \sum_{i \leq n} (\partial_{x_i}) b_i(x;h) + b_0(x;h). \tag{2.44}$$

Remarque 2.15 *D'après la construction de* $W_{h,i}$ *et la formule* (2.10) *les hypothèses de la proposition 2.8 sont vérifiées pour* $G_{1,1}(x;h) = W_{h,1}, W_{h,2}, W_{h,3}$ *et* $G_{1,2}(x;h) = a_{ij}(x;h), a_i(x;h), a_0(x;h), b_{ij}(x;h), b_i(x;h), b_0(x;h)$.

Fin de la preuve du proposition 2.5. En utilisant ((2.39)-(2.42)), ((2.43)-(2.44)), le corollaire 2.14 et le fait que $||(z-Q)^{-1}\partial_{x_i}\partial_{x_j}||_{L^2}, ||(z-Q)^{-1}\partial_{x_i}||_{L^2}, ||(z-Q)^{-1}||_{L^2} = \mathcal{O}(|\Im(z)|^{-1})$, pour $Q = P_\lambda, \widetilde{P}_h, K_{F_{i,1},F_{i,2},F_{i,3}}$, on obtient :

$$||(2)||_{tr} = \mathcal{O}(|\Im(z)|^{-2}h^\infty). \tag{2.45}$$

La même démonstration montre que $||(3)||_{tr} = \mathcal{O}(|\Im(z)|^{-2}h^\infty)$ et $||(4)||_{tr} = \mathcal{O}(|\Im(z)|^{-2}h^\infty)$, par conséquent

$$||G(z)||_{tr} \leqslant ||(2)||_{tr} + ||(3)||_{tr} + ||(4)||_{tr} = \mathcal{O}(h^\infty|\Im(z)|^{-2}).$$

Maintenant il suffit d'utiliser la formule (2.17) et le fait que $\overline{\partial}\widetilde{f}(z) = \mathcal{O}(|\Im(z)|^N)$, $\forall N \in \mathbb{N}$.

Remarque 2.16 *Comme dans la remarque 2.11 la proposition 2.7 reste vraie si on remplace $f(x)$ par $f(x)g_h(x)$.*

Preuve du théorème 1.2. Soit $f \in C_0^\infty((E_1,E_2);\mathbb{R})$ et $\widetilde{f} \in C_0^\infty(\Omega)$ une extension presque analytique de f, c'est-à-dire $\widetilde{f}|_{\mathbb{R}} = f$ et $\overline{\partial}\widetilde{f}(z) = \mathcal{O}(|\Im(z)|^\infty)$, où $\overline{\partial} := \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial_y})$. D'après la formule de Helffer-Sjöstrand (pour plus de détails sur la formule on renvoie à la proposition 1.8) et en utilisant (2.15), on obtient :

$$\Big[f(P_\lambda) - f(\widetilde{P}_h)\Big] = -\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\widetilde{f}(z)\Big[(z-P_\lambda)^{-1} - (z-\widetilde{P}_h)^{-1}\Big]L(dz), \tag{2.46}$$

où $L(dz) = dxdy$, $z = x+iy, (x,y) \in \mathbb{R}^2$, en utilisant la définition de $G(z)$ et (2.11), on obtient :

$$\begin{aligned}\Big[f(P_\lambda) - f(\widetilde{P}_h)\Big] = &-\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\widetilde{f}(z)(z-K_{F_{2,1},F_{2,2},F_{2,3}})^{-1}(P_\lambda - \widetilde{P}_h)(z-K_{F_{1,1},F_{1,2},F_{1,3}})^{-1}L(dz)\\ &-\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\widetilde{f}(z)G(z)L(dz) \qquad\qquad (*)\end{aligned}$$

puisque $\Omega \ni z \longmapsto \Big(z-K_{F_{2,1},F_{2,2},F_{2,3}}\Big)^{-1}\Big[P_\lambda - \widetilde{P}_h\Big]\Big(z-K_{F_{1,1},F_{1,2},F_{1,3}}\Big)^{-1}$ est analytique pour tout $z \in \Omega$, alors par intégration par partie, on obtient :

$$-\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\widetilde{f}(z)\Big[(z-K_{F_{2,1},F_{2,2},F_{2,3}})^{-1}(P_\lambda - \widetilde{P}_h)(z-K_{F_{1,1},F_{1,2},F_{1,3}})^{-1}\Big]L(dz) = 0 \tag{2.47}$$

$(*)$ et (2.47), entraînent

$$\Big[f(P_\lambda) - f(\widetilde{P}_h)\Big] = -\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}\widetilde{f}(z)G(z)L(dz). \tag{2.48}$$

En utilisant (2.48) et (2.16) et le fait que $\overline{\partial}\widetilde{f}(z) = \mathcal{O}(|\Im(z)|^\infty)$, on obtient :

$$\Big\|f(P_\lambda) - f(\widetilde{P}_h)\Big\|_{tr} = \mathcal{O}(h^\infty), \tag{2.49}$$

et par suite

$$tr\Big(f(P_\lambda) - f(\widetilde{P}_h)\Big) = \mathcal{O}(h^\infty). \tag{2.50}$$

Pour obtenir le théorème 1.2 il suffit d'appliquer les résultats pour les opérateurs semi-classiques (chapitre IV) à l'opérateur $\widetilde{P}_h$.

Pour montrer 1.14, on utilise le fait que :

$$\Big((1+\varphi_{0,1}(x))\lambda_k(\xi)+\varphi_{0,3}(x)\Big) \in [E_1, E_2] \Longleftrightarrow \varphi_{0,i}(x) = \phi_{0,i}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta};\ i=1,3;\ \ k=1,2.....$$

Ceci résulte du lemme 2.2.

Chapitre VI

Fonction de comptage des valeurs propres

1 Cas semi-classique :

Dans cette section on suppose que tous les hypothèses du chapitre V sont vérifiées. Soit $a < b$ tel que $[a,b] \cap \sigma(P_0) = \emptyset$, où $P_0 = p^w\Big(y, D_y\Big)$. On considère l'opérateur

$$P = \Big((1+\varphi(hy))p(y, D_y + A(hy))\Big)^w + \psi(hy, y; h); \quad (h \searrow 0).$$

Alors on sait que pour σ assez petit le spectre de P dans $[a-\sigma, b+\sigma]$ est discret. Soit $(\gamma_j(h))_{1\leqslant j\leqslant N(h)}$ la suite des valeurs propres de P dans $[a-\sigma, b+\sigma]$ comptées selon leurs multiplicités. On définit :

$$\mathcal{N}_h([a,b]) := \#\Big\{j; \gamma_j(h) \in [a,b]\Big\}.$$

Le corollaire suivant est une simple conséquence du théorème 1.3 (chapitre IV).

Corollaire 1.1 *Soit $\mathcal{N}_h([a,b])$ le nombre des valeurs propres de P dans l'intervalle $[a,b]$, on suppose que les hypothèses du théorème 1.3 sont vérifiées, alors*

$$\lim_{h\to 0}\Big[h^n \mathcal{N}_h([a,b])\Big] = C_0 \tag{1.1}$$

où

$$C_0 = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\geq 1}\int\int_{\{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n_x\times E^*;\, a\leq(1+\varphi(x))\lambda_k(\xi)+\psi_0(x)\leq b\}} dxd\xi. \tag{1.2}$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit, on pose $I(+\varepsilon) = [a-\varepsilon, b+\varepsilon]$,$I(-\varepsilon) = [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. On choisit $f_{\pm\varepsilon} \in C_0^\infty(\mathbb{R};[0,1])$, où $f_{+\varepsilon} = 1$ dans $I(+\varepsilon/2)$, $f_{+\varepsilon} = 0$ en dehors de $I(+\varepsilon)$ et $f_{-\varepsilon} = 1$ dans $I(-\varepsilon)$, $f_{-\varepsilon} = 0$ en dehors de $I(-\varepsilon/2)$, il est évident que

$$f_{-\varepsilon}(P) \leq \mathbb{1}_{[a,b]}(P) \leq f_{+\varepsilon}(P). \tag{1.3}$$

Où $\mathbb{1}_{[a,b]}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[a,b]$ et $A \geq B \Longleftrightarrow A-B$ est un opérateur positif. En utilisant (1.3), on obtient :

$$tr\Big(f_{-\varepsilon}(P)\Big) \leq \mathcal{N}_h([a,b]) \leq tr\Big(f_{+\varepsilon}(P)\Big), \tag{1.4}$$

d'après le théorème 1.3, on a :

$$\lim_{h\to 0} h^n tr\Big(f_{+\varepsilon}(P)\Big) = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\geq 1}\int\int f_{+\varepsilon}\Big((1+\varphi(x))\lambda_k(\xi)+\psi_0(x)\Big)dxd\xi$$

et

$$\lim_{h\to 0} h^n tr\Big(f_{-\varepsilon}(P)\Big) = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\geq 1}\int\int f_{-\varepsilon}\Big((1+\varphi(x))\lambda_k(\xi)+\psi_0(x)\Big)dxd\xi.$$

On déduit de (1.3) que

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\geq 1}\int\int f_{-\varepsilon}(p(x,\xi))dxd\xi \leqslant \lim_{h\to 0} h^n \mathcal{N}_h([a,b]) \leqslant \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\geq 1}\int\int f_{+\varepsilon}(p(x,\xi))dxd\xi, \tag{1.5}$$

où $p(x,\xi) = (1+\varphi(x))\lambda_k(\xi)+\psi_0(x)$. D'autre part par le théorème de convergence dominé, on a :

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\geq 1}\int\int f_{+\varepsilon}(p(x,\xi))dxd\xi \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\geq 1}\int\int_{\{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n_x\times E^*;\, a\leq(1+\varphi(x))\lambda_k(\xi)+\psi_0(x)\leq b\}} dxd\xi.$$

De même on montre que

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\geq 1}\int\int f_{-\varepsilon}(p(x,\xi))dxd\xi \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\geq 1}\int\int_{\{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n_x\times E^*;\, a\leq(1+\varphi(x))\lambda_k(\xi)+\psi_0(x)\leq b\}} dxd\xi.$$

Maintenant on tend ε vers zéro dans (1.5), on obtient (1.10).

Il est évident d'après le corollaire 1.1 que $\mathcal{N}_h([a,b]) = C_0h^{-n}+\mathcal{O}(h^{-n+1})$, on va donner une estimation plus précise du terme $\mathcal{O}(h^{-n+1})$. Dans la suite on va supposer que le champ magnétique $A=0$, et on note :

$$P = \Big((1+\varphi(hy))p(y,D_y)\Big)^w + \psi(hy,y;h); \quad (h\searrow 0).$$

Fixons $\mu\in\mathbb{R}\setminus\sigma_{ess}(P)$ et posons

$$\Sigma_\mu = \Big\{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n};\ \exists k\geq 1;\ \text{tel que } (1+\varphi(x))\lambda_k(\xi)+\psi_0(x)=\mu\Big\}.$$

Pour $(x_0,\xi_0)\in\Sigma_\mu$ on suppose que l'hypothèse suivante est vérifiée :

$$(\mathbf{H})\begin{cases} \nabla_x\varphi(x_0)\lambda_k(\xi_0)+\nabla_x\psi_0(x_0)\neq 0 \\ \qquad\qquad\textit{où} \\ \lambda_k(\xi_0) \text{ est simple et } \nabla_\xi\lambda_k(\xi_0)\neq 0\end{cases}$$

Théorème 1.2 *Soit $\mathcal{N}_h([a,b])$ le nombre des valeurs propres de P dans l'intervalle $[a,b]$ comptées avec leurs multiplicités. On suppose que $(\mathbf{H_1}-\mathbf{H_6})$ et $(\mathbf{H})$ sont vérifiées pour $\mu\in\{a,b\}$. On a :*

$$\mathcal{N}_h([a,b]) = C_0h^{-n}+\mathcal{O}(h^{1-n}), \quad (h\searrow 0), \tag{1.6}$$

avec

$$C_0 = \int_{\mathbb{R}^n_x} \left[\rho\left(\frac{b-\psi_0(x)}{1+\varphi(x)} \right) - \rho\left(\frac{a-\psi_0(x)}{1+\varphi(x)} \right) \right] dx. \tag{1.7}$$

Ici $\rho(t) = (2\pi)^{-n} \int_{E^*} (\sum_{\lambda_k(\xi) \leqslant t} \mathbb{1}) d\xi$ *désigne la densité d'états intégrée associée à* $p^w(y, D_y)$.

Preuve. Soit $\sigma > 0$ assez petit. Soient $\phi_1 \in C_0^\infty((a-\sigma, a+\sigma); [0,1]), \phi_2 \in C_0^\infty((a+\frac{\sigma}{2}, b-\frac{\sigma}{2}); [0,1]), \phi_3 \in C_0^\infty((b-\sigma, b+\sigma); [0,1])$ tel que $\phi_1+\phi_2+\phi_3 = 1$ sur $[a-\frac{\sigma}{2}, b+\frac{\sigma}{2}]$. Soient $\gamma_0(h) \leqslant \gamma_1(h) \leqslant ... \leqslant \gamma_N(h)$ les valeurs propres de P (comptées avec leurs multiplicités) dans $[a-\sigma, b+\sigma]$. Puisque $\phi_1+\phi_2+\phi_3 = 1$ sur $[a,b]$ alors

$$(\mathbb{1}_{[a,b]}\phi_1)(\gamma_j(h)) + (\mathbb{1}_{[a,b]}\phi_2)(\gamma_j(h)) + (\mathbb{1}_{[a,b]}\phi_3)(\gamma_j(h)) = \mathbb{1}_{[a,b]}(\gamma_j(h))$$

et par suite

$$\sum_j \mathbb{1}_{[a,b]}\phi_1(\gamma_j(h)) + \sum_j \mathbb{1}_{[a,b]}\phi_2(\gamma_j(h)) + \sum_j \mathbb{1}_{[a,b]}\phi_3(\gamma_j(h)) = \sum_j \mathbb{1}_{[a,b]}(\gamma_j(h))$$

et puisque *supp* $\phi_1 \subset (a-\sigma, a+\sigma)$, *supp* $\phi_2 \subset (a+\frac{\sigma}{2}, b-\frac{\sigma}{2})$, *supp* $\phi_3 \subset (b-\sigma, b+\sigma)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_h([a,b]) &= \sum_{a \leqslant \gamma_j(h) \leqslant b} (\phi_1+\phi_2+\phi_3)(\gamma_j(h)) \\ &= \sum_{a \leqslant \gamma_j(h)} \phi_1(\gamma_j(h)) + \sum_j \phi_2(\gamma_j(h)) + \sum_{\gamma_j(h) \leqslant b} \phi_3(\gamma_j(h)). \end{aligned} \tag{1.8}$$

On sait que

$$\sum_j \phi_2(\gamma_j(h)) = tr\Big(\phi_2(P)\Big) = h^{-n} \int\int_{\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_\xi} \phi_2\Big((1+\varphi(\xi))t + \psi_0(\xi)\Big) d\rho(t) d\xi + \mathcal{O}(h^{1-n}). \tag{1.9}$$

Dans toute la suite on désigne par $M(\tau, h)$ la distribution $\sum_{\gamma_j(h) \leqslant \tau} \phi_3(\gamma_j(h))$. Soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}; [0,1])$ égale à un dans un petit voisinage de zéro et $h > 0$.
Aux sens de distribution, on a :

$$\mathcal{M}(\tau) = M'(\tau, h) = \sum_j \delta(\tau - \gamma_j(h)) \phi_3(\gamma_j(h)). \tag{1.10}$$

Un calcul simple au sens de distribution montre que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \mathcal{F}_h^{-1}\theta * M(\tau, h) &= \mathcal{F}_h^{-1}\theta * M'(\tau, h) \\ &= \mathcal{F}_h^{-1}\theta * \sum_j \phi_3(\gamma_j(h)) \delta(\tau - \gamma_j(h)) \\ &= \sum_j \phi_3(\gamma_j(h)) \mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - \gamma_j(h)) \\ &= tr\Big(\phi_3(P) \mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - P)\Big), \end{aligned} \tag{1.11}$$

où $u * \phi$ est le produit de convolution de la distribution u par la fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Tout d'abord, en utilisant la formule de Helffer-Sjöstrand et l'hamiltonien effectif on démontre comme dans la proposition 2.10 que :

$$tr\Big(\phi_3(P)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - P)\Big) = \tag{1.12}$$

$$tr\left(-\frac{1}{\pi}\int \overline{\partial}(\widetilde{\phi_3})(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - z)\partial_z \widehat{E}_{-+}(z)\widehat{E}_{-+}^{-1}(z)\widehat{\chi}L(dz)\right) + \mathcal{O}(h^\infty).$$

Ici $\widetilde{\phi}_3$ est une extension presque analytique de ϕ_3, et $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, égale à un sur un voisinage de $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \exists z \in \operatorname{supp}\widetilde{\phi}_3, \xi \in \mathbb{R}^n;\ \det(E^0_{-+}(x,\xi,z)) = 0\}$.

Des formules de trace similaires au premier terme du membre à droite de (1.12) ont été étudiées dans [12]. Pour appliquer les résultats dans [12], il suffit de vérifier que le symbole principal de l'opérateur $E^w_{-+}(x, hD_x, z; h)$ est micro-hyperbolique pour $z \in \operatorname{supp}(\phi_3)$.

Définition 1.3 . *On dit que* $p(x,\xi) \in S^0(\mathbb{R}^2; \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ *est micro-hyperbolique en* (x_0, ξ_0) *dans la direction* $T \in \mathbb{R}^{2n}$*, si et seulement s'il existe une constante* $C_0, C_1, C_2 > 0$ *telle que :*

$$(\langle dp(x,\xi), T\rangle\omega, \omega) \geq \frac{1}{C_0}||\omega||^2 - C_1||p(x,\xi)\omega||^2, \tag{1.13}$$

pour tout $\omega \in \mathbb{C}^n$ *et tout* $(x,\xi) \in \Big\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}; ||(x,\xi) - (x_0,\xi_0)|| \leqslant \frac{1}{C_2}\Big\}$.

Lemme 1.4 *On suppose que l'hypothèse* (**H**) *est vérifiée alors* $E^0_{-+}(x,\xi,\mu)$ *est micro-hyperbolique en tout point de*

$$\Sigma_\mu := \Big\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times E^*; \det(E^0_{-+}(x,\xi,\mu)) = 0\Big\} =$$

$$\bigcup_{k\geqslant 1}\Big\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times E^*, (1+\varphi(x))\lambda_k(\xi) + \psi_0(x) = \mu\Big\}, \quad \mu = \{a, b\}.$$

Preuve. Rappelons que par la remarque 2.4 formule (2.21) on a :

$$E^0_{-+}(x,\xi,z) = \frac{1}{1+\varphi(x)}E_{-+}\left(\xi, \frac{z - \psi_0(x)}{1+\varphi(x)}\right),$$

ou $E_{-+}(\xi, z)$ est l'hamiltonien effectif correspondant à $p^w(y, D_y + \xi) - z$. Soit $(x_0,\xi_0) \in \Sigma_\mu$, alors il existe $k \geq 1$ tel que $(1+\varphi(x_0))\lambda_k(\xi_0) = \mu - \psi_0(x_0)$.

Premier cas : Supposons que $\nabla\varphi(x_0)\lambda_k(\xi_0) + \nabla\psi(x_0) = 0$, alors par hypothèse (**H**) la valeur propre $\lambda_k(\xi_0)$ est simple et $\nabla\lambda_k(\xi_0) \neq 0$. Dans ce cas et par construction de l'hamiltonien effectif on peut supposer qu'au voisinage de ξ_0 on a : $E_{-+}(\xi,\mu) = \lambda_k(\xi) - z$. Par conséquent

$$\nabla_\xi E^0_{-+}(x_0,\xi_0,z) \neq 0,$$

ceci implique que $E^0_{-+}(x_0,\xi_0,\mu)$ est micro-hyperbolique.

Deuxième cas : Supposons que

$$\nabla\varphi(x_0)\lambda_k(\xi_0) + \nabla\psi(x_0) \neq 0 \text{ et } (1+\varphi(x_0))\lambda_k(\xi_0) + \psi_0(x_0) = \mu. \tag{1.14}$$

Posons $G(x) = \frac{\mu-\psi_0(x)}{1+\varphi(x)}$. Un calcul simple montre que (1.14) implique

$$M := \nabla G(x_0) \neq 0.$$

En dérivant par rapport à x on obtient :

$$\langle M.\nabla_x E^0_{-+}(x_0,\xi_0,\mu)\rangle = -(1+\varphi(x_0))^{-1}\langle M.\nabla_x\varphi(x_0)\rangle E_{-+}\Big(\xi_0, G(x_0)\Big) + \|M\|^2\partial_\mu E_{-+}\Big(\xi_0, G(x_0)\Big).$$

Combinons ceci avec le fait que $\partial_\mu E_{-+}(\xi,\mu) = E_-(\xi,\mu)E_+(\xi,\mu) > 0$ (voir (2.12), chapitre IV), on obtient :

$$\langle M.\nabla_x E^0_{-+}(x_0,\xi_0,\mu)\omega,\omega\rangle \geq \frac{1}{C}||\omega||^2 - C||E^0_{-+}(x_0,\xi_0,\mu)\omega||^2.$$

En conclusion, l'hypothèse (**H**) implique que $E^0_{-+}(x,\xi,\mu)$ est micro-hyperbolique en tout point $(x_0,\xi_0) \in \Sigma_\mu$.

□

Maintenant, le résultat suivant est une conséquence du théorème dans [12].

Théorème 1.5 . *On suppose que l'hypothèse* (**H**) *est vérifiée au point* τ. *Il existe* $\sigma > 0$ *assez petit et* $C > 0$ *assez grand tels que, pour tout* $\theta \in C_0^\infty((-\frac{1}{C},\frac{1}{C});\mathbb{R})$ *avec* $\theta = 1$ *au voisinage de zéro et* $\phi \in C_0^\infty((\tau-\sigma,\tau+\sigma);\mathbb{R})$, *il existe une suite de fonctions* $\gamma_j \in C^\infty(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$ $\forall N, M \geq 1$ *on a*

$$tr\Big(\phi(P)\,\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau-P)\Big) = h^{-n}\left(f(\tau)\sum_{j=0}^{M}\gamma_j(\tau)h^j + \mathcal{O}\left(\frac{h^{M+1}}{\langle\tau\rangle^N}\right)\right); \quad (h \searrow 0) \tag{1.15}$$

uniformément en $\tau \in \mathbb{R}$. *Où,* $\langle\tau\rangle = (1+\tau^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$\gamma_0(\tau) = -\frac{1}{2\pi i}\int\int_{\mathbb{R}^n_x\times E^*} tr\left(\Big[E_{-+}(\xi,z)^{-1}\partial_z E_{-+}(\xi,z)\Big]_{z=\frac{\tau-\psi_0(x)}{1+\varphi(x)}-i.0}^{z=\frac{\tau-\psi_0(x)}{1+\varphi(x)}+i.0}\right)\chi(x,\xi)\frac{dxd\xi}{(2\pi)^n}.$$

Ici $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ *est égal à un dans un voisinage de* $\Sigma_{[\mu-\sigma,\mu+\sigma]} := \cup_{\eta\in[\mu-\sigma,\mu+\sigma]}\Sigma_\eta$, *où* $\Sigma_\eta = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times E^*; det(E_{-+}(\xi,z)) = 0\}$.

Par des arguments Tauberian (voir [55], théorème V-13) il résulte de (1.8), (1.9), (1.10), (1.11), (1.12)et (1.15)

$$\sum_{\gamma_j(h)\leqslant b}\phi_3(\gamma_j(h)) = h^{-n}m(b) + \mathcal{O}(h^{1-n}) \tag{1.16}$$

et

$$\sum_{a\leqslant\gamma_j(h)}\phi_1(\gamma_j(h)) = h^{-n}m_1(a) + \mathcal{O}(h^{1-n}) \tag{1.17}$$

où

$$m(b) = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\geq 1}\int\int_{\{(x,\xi)\in E^*\times\mathbb{R}^n_\xi;(1+\varphi(x))\lambda_k(\xi)+\psi_0(x)\leqslant b\}}\phi_3\Big((1+\varphi(x))\lambda_k(\xi)+\psi_0(x)\Big)dxd\xi \tag{1.18}$$

$$m_1(a) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k\geq 1} \int\int_{\{(x,\xi)\in E^*\times\mathbb{R}^n_\xi;(1+\varphi(x))\lambda_k(\xi)+\psi_0(x)\geq a\}} \phi_1\Big((1+\varphi(x))\lambda_k(\xi)+\psi_0(x)\Big)dxd\xi. \quad (1.19)$$

Par conséquent, (1.8), (1.16), (1.17), (1.18), (1.18) et (1.19) donnent le théorème 1.2.

□

2 Grande constante de couplage

Dans cette section, on garde les notations et les hypothèses du chapitre V.

Soit $E_1 < E_2$ tel que $[E_1, E_2] \cap \sigma(P_0) = \emptyset$. Soit $(\mu_j(\lambda))_{1\leqslant j\leqslant N(\lambda)}$ la suite des valeurs propres de P_λ dans $[E_1-\sigma, E_2+\sigma]$ comptées selon leurs multiplicités. Ici σ est une constante positive assez petite. On définit :

$$\mathcal{N}_\lambda([E_1,E_2]) := \#\Big\{j;\ \mu_j(\lambda)\in[E_1,E_2]\Big\}.$$

Comme le corollaire 1.1, le résultat suivant est une simple conséquence du théorème 1.2 (chapitre V).

Corollaire 2.1 *Soit $\mathcal{N}_\lambda([E_1,E_2])$ le nombre des valeurs de P_λ dans l'intervalle $[E_1,E_2]$, on suppose que les hypothèses du théorème 1.2 sont vérifiées, alors*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\Big[\lambda^{-\frac{n}{\delta}}\mathcal{N}_\lambda([E_1,E_2])\Big] = a_0 \quad (2.1)$$

où

$$a_0 = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\geq 1}\int\int_{\{(x,\xi)\in\ \mathbb{R}^n_x\times E^*;\ E_1\leq(1+\varphi_{0,1}(x))\lambda_k(\xi)+\varphi_{0,3}(x)\leq E_2\}} dxd\xi \quad (2.2)$$

avec $\varphi_{0,i}(x) = \phi_{0,i}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta}; i = 1,3.$

Théorème 2.2 *Soit $\mathcal{N}_\lambda([E_1,E_2])$ le nombre des valeurs propres de P_λ (comptées avec leurs multiplicités) dans $[E_1,E_2]$. Sous les hypothèses du théorème (1.2), on a*

$$\mathcal{N}_\lambda([E_1,E_2]) = a_0\lambda^{\frac{n}{\delta}} + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{n-1}{\delta}}), \quad (\lambda \nearrow +\infty) \quad (2.3)$$

où,

$$a_0 = \int_{\mathbb{R}^n_x}\rho\left(\frac{E_2-\phi_{0,3}(\frac{x}{|x|})|x|^{-\delta}}{1+\phi_{0,1}(\frac{x}{|x|})|x|^{-\delta}}\right) - \rho\left(\frac{E_1-\phi_{0,3}(\frac{x}{|x|})|x|^{-\delta}}{1+\phi_{0,1}(\frac{x}{|x|})|x|^{-\delta}}\right)dx. \quad (2.4)$$

Ici $\rho(t)$ désigne la densité intégrée d'états associée à l'opérateur $P_0 = \nabla^* a(y)\nabla + p(y)$.

Nous omettons la démonstration de ce théorème puisqu'elle est exactement similaire à celle de la proposition 2.7 (chapitre VI) et du théorème 1.2 de ce chapitre. Nous donnons brièvement les étapes de la démonstration.

Comme dans la preuve du théorème 1.2, l'étape essentielle de la démonstration est de donner un développement asymptotique en puissance de $h = \lambda^{-1/\delta}$ de

$$tr\Big(\phi(P_\lambda)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - P_\lambda)\Big), \tag{2.5}$$

où ϕ est une fonction à support dans un petit voisinage de $\mu \in \{E_1, E_2\}$. Pour cela, nous utilisons l'opérateur semi-classique $\widetilde{P}_h$ construit dans le chapitre V pour montrer que

$$tr\Big(\phi(P_\lambda)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - P_\lambda)\Big) = tr\Big(\phi(\widetilde{P}_h)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - \widetilde{P}_h)\Big) + \mathcal{O}(h^\infty).$$

Maintenant il suffit d'appliquer le théorème 1.5 pour donner un développement asymptotique de (2.5). La suite de la preuve est similaire à celle du théorème 1.2.

Chapitre VII

Applications

1 Application pour des perturbations très oscillantes

Dans cette section on s'intéresse à l'étude spectrale de l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel très oscillant et dépendant d'un petit paramètre semi-classique h. Pour les preuves des résultats on renvoie aux chapitres IV et VI.

1.1 Introduction

Dans le régime semi-classique (h petit), nous étudions le spectre discret de l'opérateur de Schrödinger avec une perturbation très oscillante du type suivant :

$$H(h) := H_0 + V(y, hy) = -\Delta_y + V(y, hy); \qquad (h \searrow 0) \tag{1.1}$$

On suppose que le potentiel V satisfait les hypothèses suivantes :
($\mathbf{A_1}$) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} V(y,x) = 0$,
($\mathbf{A_2}$) $V(y+\gamma, x) = V(y,x)$, $\forall \gamma \in \Gamma$.
($\mathbf{A_3}$) Le potentiel V est une fonction à valeurs réelles bornée ainsi que toutes ses dérivées, c'est-à-dire, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}$

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta V(y,x)| \leq C_{\alpha,\beta}, \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{N}^{2n}.$$

($\mathbf{A_4}$) On suppose qu'il existe un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n_y/\Gamma} V(y, x_0)dy < 0$.

Grâce à l'hypothèse ($\mathbf{A_1}$) V est une perturbation relativement compacte, (c'est-à-dire $V(H_0+i)^{-1}$ est compacte). Par le critère de Weyl, on déduit que : $\sigma_{ess}(H(h)) = \sigma_{ess}(H_0) = [0, +\infty)$. Fixons un intervalle $K = (-\infty, 0)$, par conséquent la perturbation V crée des valeurs propres isolées et de multiplicités finies dans l'intervalle K, on s'intéresse au comportement des valeurs propres de $H(h)$ dans K.

Tout d'abord on va montrer que l'hypothèse ($\mathbf{A_4}$) implique que le spectre discret de $H(h)$ est non vide.

Proposition 1.1 *Sous l'hypothèse* ($\mathbf{A_4}$), *l'opérateur* $H(h) = -\Delta_y + V(y, hy)$ *admet des valeurs propres discrètes négatives pour* h *assez petit.*

Preuve. Par un changement variable $\widetilde{y} = hy$, l'opérateur $H(h)$ est unitairement équivalent à l'opérateur $\widetilde{H}(h) = -h^2\Delta_y + V(\frac{y}{h}, y)$. Par le théorème du min-max, pour démontrer que $\sigma_{disc}(H(h)) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$, il suffit de montrer qu'il existe $\psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$ tel que $\psi \neq 0$ et pour h assez petit on a :

$$\langle \widetilde{H}(h)\psi, \psi \rangle < 0. \tag{1.2}$$

Tout d'abord, pour $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\left\langle \widetilde{H}(h)\psi, \psi \right\rangle = h^2 \left\| \nabla\psi \right\|^2 + \int_{\mathbb{R}^n_x} V\Big(\frac{x}{h}, x\Big)|\psi(x)|^2 dx. \tag{1.3}$$

La fonction $y \longmapsto V(y, x)$ est Γ-périodique en y donc son développement en série de Fourier s'écrit

$$V(y, x) = \sum_{\gamma^* \in \Gamma^*} C_{\gamma^*}(x) e^{i\langle \gamma^* \cdot y \rangle} \tag{1.4}$$

où

$$C_{\gamma^*}(x) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(E)} \int_E V(y, x) e^{-i\langle \gamma^* \cdot y \rangle} dy. \tag{1.5}$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^n_x} V\Big(\frac{x}{h}, x\Big)|\psi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n_x} C_0(x)|\psi(x)|^2 dx + \sum_{\gamma^* \neq 0, \gamma^* \in \Gamma^*} \int_{\mathbb{R}^n_x} C_{\gamma^*}(x)|\psi(x)|^2 e^{i\frac{1}{h}\langle \gamma^* \cdot x \rangle} dx \tag{1.6}$$

$$= (1) + (2).$$

Maintenant on choisit ψ à support dans un petit voisinage de x_0 et $\psi = 1$ près de x_0. Alors il est clair par le théorème de Paley-Wiegner que $\lim_{h \searrow 0}(2) = 0$. Donc (1.3) et (1.5) donnent

$$\lim_{h \searrow 0} \left\langle \widetilde{H}(h)\psi, \psi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n_x} C_0(x)|\psi(x)|^2 dx,$$

ceci implique (1.2) si l'hypothèse $(\mathbf{A_4})$ est vérifiée. Ce qui achève la démonstration du théorème.

1.2 Formule de trace

En appliquant le théorème 1.3 (du chapitre IV), corollaire 1.1, théorème 1.2 et le théorème 1.5 (du chapitre précédent) on obtient :

Théorème 1.2 *Soit $f \in C_0^\infty((-\infty, 0); \mathbb{R})$. Sous les hypothèses $(\mathbf{A_1}), ..., (\mathbf{A_4})$ l'opérateur $f(H(h))$ est de classe trace et il existe une suite de nombres réels $(a_k(f))_{k \geqslant 0}$ telle que :*

$$tr\Big[f(H(h))\Big] \sim h^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f)\, h^k, \qquad (h \searrow 0), \tag{1.7}$$

avec

$$a_0(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k \geq 1} \int \int_{\mathbb{R}^n_x \times E^*} f(\mu_k(x, \xi)) dx d\xi. \tag{1.8}$$

Ici $(\mu_k(x,\xi))_{k\geq 1}$ *désignent les valeurs propres de l'opérateur* $(D_y+\xi)^2+V(y,x)$ *comme opérateur de* $L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma)\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma)$.

Remarque 1.3 *Soit* $\rho(t,x)$ *la densité d'états intégrée associée à* $-\Delta_y+V(y,x)$, *(où* x *est un paramètre), i.e.,*

$$\rho(t,x):=(2\pi)^{-n}\sum_{k\geq 1}\int_{\{\xi\in E^*;\mu_k(x,\xi)\leq t\}}d\xi.$$

Par intégration par partie dans (1.7), *on obtient*

$$a_0(f)=-\int_{\mathbb{R}^n_x}\int_{\mathbb{R}}f'(t)\rho(t,x)dtdx.$$

On fixe $\lambda<0$, et soit

$$\Sigma_\lambda=\bigcup_{k=1}^{+\infty}\Big\{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times E^*;\ \mu_k(x,\xi)=\lambda\Big\}.$$

On suppose que l'hypothèse suivante est vérifiée
$(\mathbf{A_5})$ Pour $(x_0,\xi_0)\in\Sigma_\lambda$, $\mu_k(x_0,\xi_0)$ est simple et $\nabla_{x,\xi}\left(\mu_k(x_0,\xi_0)\right)\neq 0$.

Théorème 1.4 *Sous les hypothèses* $(\mathbf{A_1}),...,(\mathbf{A_5})$ *il existe* $\sigma>0$ *assez petit et* $C>0$ *assez grand tels que, pour tout* $f\in C_0^\infty((\lambda-\sigma,\lambda+\sigma);\mathbb{R})$ *et* $\theta\in C_0^\infty((-\frac{1}{C},\frac{1}{C});\mathbb{R})$, *avec* $\theta=1$ *dans un petit voisinage de zéro, il existe une suite de fonctions* $\gamma_j(\tau)\in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $j\in\mathbb{N}$, *telle que pour tout* $N,M\geq 1$ *on a*

$$tr\Big(f(H(h))\,\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau-H(h))\Big)=h^{-n}\left(f(\tau)\sum_{j=0}^{M}\gamma_j(\tau)h^j+\mathcal{O}\left(\frac{h^M}{\langle\tau\rangle^N}\right)\right),\ \ quand\ \ h\searrow 0, \tag{1.9}$$

uniformément en $\tau\in\mathbb{R}$. *Ici* $\langle\tau\rangle=(1+\tau^2)^{\frac{1}{2}}$.

Corollaire 1.5 *Soit* λ *un nombre réel négatif. On désigne par* $\mathcal{N}_h(\lambda)$ *le nombre de valeurs propres de* $H(h)$ *dans l'intervalle* $(-\infty,\lambda]$ *comptées avec leur multiplicité. Sous les hypothèses du théorème 1.2, on a*

$$\lim_{h\searrow 0}\Big[h^n\mathcal{N}_h(\lambda)\Big]=D_0, \tag{1.10}$$

où

$$D_0=\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\geq 1}\int\int_{\{(x,\xi)\ \in\mathbb{R}^n_x\times E^*;\ \mu_k(x,\xi)\leq\lambda\}}dxd\xi=\int_{\mathbb{R}^n}\rho(\lambda,x)dx. \tag{1.11}$$

Théorème 1.6 *Sous les hypothèses,* $(\mathbf{A_1}),...,(\mathbf{A_5})$ *on a :*

$$\mathcal{N}_h(\lambda)=h^{-n}\Big(D_0+\mathcal{O}(h)\Big),\quad(h\searrow 0) \tag{1.12}$$

où,

$$D_0=\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\geq 1}\int\int_{\{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n_x\times E^*|\ \mu_k(x,\xi)\leq\lambda\}}dxd\xi=\int_{\mathbb{R}^n}\rho(\lambda,x)dx. \tag{1.13}$$

Références bibliographiques

[1] S. Alama, M. Avellaneda, P. A. Deift, and R. Hempel. On the existence of eigenvalues of a divergence-form operator $A + \lambda B$ in a gap of $\sigma(A)$. *Asymptotic Anal.*, 8(4) :311–344, 1994.

[2] Stanley Alama, Percy A. Deift, and Rainer Hempel. Eigenvalue branches of the Schrödinger operator $H - \lambda W$ in a gap of $\sigma(H)$. *Comm. Math. Phys.*, 121(2) :291–321, 1989.

[3] J. E. Avron, I. W. Herbst, and B. Simon. Schrödinger operators with magnetic fields. III. Atoms in homogeneous magnetic field. *Comm. Math. Phys.*, 79(4) :529–572, 1981.

[4] Anne Balazard-Konlein. Asymptotique semi-classique du spectre pour des opérateurs à symbole opérateur. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 301(20) :903–906, 1985.

[5] Richard Beals. Characterization of pseudodifferential operators and applications. *Duke Math. J.*, 44(1) :45–57, 1977.

[6] M. Sh. Birman. Discrete spectrum of the periodic elliptic operator with a differential perturbation. In *Journées "Équations aux Dérivées Partielles" (Saint-Jean-de-Monts, 1994)*, pages Exp. No. XIV, 4. École Polytech., Palaiseau, 1994.

[7] V S Buslaev. Semiclassical approximation for equations with periodic coefficients. *Russian Mathematical Surveys*, 42(6) :97, 1987.

[8] Percy A. Deift and Rainer Hempel. On the existence of eigenvalues of the Schrödinger operator $H - \lambda W$ in a gap of $\sigma(H)$. *Comm. Math. Phys.*, 103(3) :461–490, 1986.

[9] M. Dimassi, J. C. Guillot, and J. Ralston. Semiclassical asymptotics in magnetic Bloch bands. *J. Phys. A*, 35(35) :7597–7605, 2002.

[10] Mouez Dimassi. Développements asymptotiques des perturbations lentes de l'opérateur de Schrödinger périodique. *Comm. Partial Differential Equations*, 18(5-6) :771–803, 1993.

[11] Mouez Dimassi. Développements asymptotiques pour des perturbations fortes de l'opérateur de Schrödinger périodique. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 61(2) :189–204, 1994.

[12] Mouez Dimassi. Trace asymptotics formulas and some applications. *Asymptot. Anal.*, 18(1-2) :1–32, 1998.

[13] Mouez Dimassi. Développements asymptotiques de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique fort. *Comm. Partial Differential Equations*, 26(3-4) :595–627, 2001.

[14] Mouez Dimassi. Spectral shift function in the large coupling constant limit. *Ann. Henri Poincaré*, 7(3) :513–525, 2006.

[15] Mouez Dimassi and Anh Tuan Duong. Trace asymptotics formula for the Schrödingeroperators with constant magnetic fields. *J. Math. Anal. Appl.*, 416(1) :427–448, 2014.

[16] Mouez Dimassi, Jean-Claude Guillot, and James Ralston. On effective Hamiltonians for adiabatic perturbations. *Mat. Contemp.*, 26 :31–39, 2004.

[17] Mouez Dimassi and Johannes Sjöstrand. Trace asymptotics via almost analytic extensions. In *Partial differential equations and mathematical physics (Copenhagen, 1995 ; Lund, 1995)*, volume 21 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 126–142. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996.

[18] Mouez Dimassi and Johannes Sjöstrand. *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, volume 268 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[19] Mouez Dimassi and Maher Zerzeri. Spectral shift function for perturbed periodic Schrödinger operators. The large-coupling constant limit case. *Asymptot. Anal.*, 75(3-4) :233–250, 2011.

[20] Mouez Dimassi and Maher Zerzeri. A time-independent approach for the study of spectral shift function. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 350(7-8) :375–378, 2012.

[21] Anh Tuan Duong. Spectral asymptotics for two-dimensional Schrödinger operators with strong magnetic fields. *Methods Appl. Anal.*, 19(1) :77–98, 2012.

[22] Lawrence C. Evans and Maciej Zworski. Lectures on semiclassical analysis. *Unpublished Lecture Notes*, 2006.

[23] C. Gérard, A. Martinez, and J. Sjöstrand. A mathematical approach to the effective Hamiltonian in perturbed periodic problems. *Comm. Math. Phys.*, 142(2) :217–244, 1991.

[24] F. Gesztesy and B. Simon. On a theorem of Deift and Hempel. *Comm. Math. Phys.*, 116(3) :503–505, 1988.

[25] J.-C. Guillot, J. Ralston, and E. Trubowitz. Semiclassical asymptotics in solid state physics. *Comm. Math. Phys.*, 116(3) :401–415, 1988.

[26] B. Helffer and D. Robert. Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 31(3) :xi, 169–223, 1981.

[27] B. Helffer and D. Robert. Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques hypoelliptiques. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 9(3) :405–431, 1982.

[28] B. Helffer and D. Robert. Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles. *J. Funct. Anal.*, 53(3) :246–268, 1983.

[29] B. Helffer and J. Sjöstrand. Équation de Schrödinger avec champ magnétique et équation de Harper. In *Schrödinger operators (Sønderborg, 1988)*, volume 345 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 118–197. Springer, Berlin, 1989.

[30] B. Helffer and J. Sjöstrand. Opérateurs de Schrödinger avec champs magnétiques faibles et constants. In *Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1988–1989*, pages Exp. No. XII, 11. École Polytech., Palaiseau, 1989.

[31] Bernard Helffer and Didier Robert. Propriétés asymptotiques du spectre d'opérateurs pseudodifférentiels sur $\mathbf{R}^n$. *Comm. Partial Differential Equations*, 7(7) :795–882, 1982.

[32] Sjöstrand J. Helffer, B. Analyse semi-classique pour l'équation de harper (avec application à l'équation de schrödinger avec champ magnétique). *Mémoires de la Société Mathématique de France*, 34 :1–113, 1988.

[33] Sjöstrand J. Helffer, B. On diamagnetism and de haas-van alphen effect. *Annales de l'institut Henri Poincaré (A) Physique théorique*, 52(4) :303–375, 1990.

[34] Sjöstrand Johannes Helffer, Bernard. équation de Schrödinger avec champ magnétique et équation de harper. *Journées équations aux dérivées partielles*, pages 1–9, 1987.

[35] Rainer Hempel. On the asymptotic distribution of the eigenvalue branches of the Schrödinger operator $H \pm \lambda W$ in a spectral gap of H. *J. Reine Angew. Math.*, 399 :38–59, 1989.

[36] P. D. Hislop and I. M. Sigal. *Introduction to spectral theory*, volume 113 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996. With applications to Schrödinger operators.

[37] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. III*, volume 274 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* [*Fundamental Principles of Mathematical Sciences*]. Springer-Verlag, Berlin, 1985. Pseudodifferential operators.

[38] V. Ivrii. *Microlocal Analysis and Precise Spectral Asymptotics*. Medical Radiology. Springer, 1998.

[39] Victor Ivrii. *Microlocal analysis and precise spectral asymptotics*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[40] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators ; 2nd ed.* Grundlehren Math. Wiss. Springer, Berlin, 1976.

[41] Werner Kirsch and Fabio Martinelli. On the density of states of Schrödinger operators with a random potential. *J. Phys. A*, 15(7) :2139–2156, 1982.

[42] Martin Klaus. Some applications of the Birman-Schwinger principle. *Helv. Phys. Acta*, 55(1) :49–68, 1982/83.

[43] Peter Kuchment. *Floquet theory for partial differential equations*, volume 60 of *Operator Theory : Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.

[44] Gianluca Panati, Herbert Spohn, and Stefan Teufel. Effective dynamics for Bloch electrons : Peierls substitution and beyond. *Comm. Math. Phys.*, 242(3) :547–578, 2003.

[45] Gianluca Panati, Herbert Spohn, and Stefan Teufel. Motion of electrons in adiabatically perturbed periodic structures. In *Analysis, modeling and simulation of multiscale problems*, pages 595–617. Springer, Berlin, 2006.

[46] G. D. Raĭkov. Spectral asymptotics for the Schrödinger operator with potential which steadies at infinity. *Comm. Math. Phys.*, 124(4) :665–685, 1989.

[47] G.D. Raikov. Eigenvalue asymptotics for the Schrödinger operator with homogeneous magnetic potential and decreasing electric potential. *Comm. Part. Diff. Eq.*, 15 :407–434, 1990.

[48] George D. Raĭkov. Eigenvalue asymptotics for the Schrödinger operator with homogeneous magnetic potential and decreasing electric potential. I. Behaviour near the essential spectrum tips. *Comm. Partial Differential Equations*, 15(3) :407–434, 1990.

[49] George D. Raikov. Eigenvalue asymptotics for the Schrödinger operator in strong constant magnetic fields. *Comm. Partial Differential Equations*, 23(9-10) :1583–1619, 1998.

[50] Georgi D. Raikov and Simone Warzel. Quasi-classical versus non-classical spectral asymptotics for magnetic Schrödinger operators with decreasing electric potentials. *Rev. Math. Phys.*, 14(10) :1051–1072, 2002.

[51] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics : Functional analysis*. Methods of Modern Mathematical Physics. Academic Press, 1980.

[52] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics. I. Functional analysis*. Academic Press, 1972.

[53] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978.

[54] D. Robert. *Autour de L'approximation Semi-classique.* Notas de curso / Universidade Federal de Pernambuco, Instituto de Matemática. Inst. de Matemática, Univ. Federal de Pernambuco, 1983.

[55] Didier Robert. *Autour de l'approximation semi-classique*, volume 68 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1987.

[56] Barry Simon. Semiclassical analysis of low lying eigenvalues. III. Width of the ground state band in strongly coupled solids. *Ann. Physics*, 158(2) :415–420, 1984.

[57] Johannes Sjöstrand. Magnetic Schrödinger operators and effective Hamiltonians. In *Recent developments in quantum mechanics (Poiana Braşov, 1989)*, volume 12 of *Math. Phys. Stud.*, pages 175–193. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.

[58] Johannes Sjöstrand. Microlocal analysis for the periodic magnetic Schrödinger equation and related questions. In *Microlocal analysis and applications (Montecatini Terme, 1989)*, volume 1495 of *Lecture Notes in Math.*, pages 237–332. Springer, Berlin, 1991.

[59] A. V. Sobolev. Weyl asymptotics for the discrete spectrum of the perturbed Hill operator. In *Estimates and asymptotics for discrete spectra of integral and differential equations (Leningrad, 1989–90)*, volume 7 of *Adv. Soviet Math.*, pages 159–178. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[60] M. A. Šubin. Spectral theory and the index of elliptic operators with almost-periodic coefficients. *Uspekhi Mat. Nauk*, 34(2(206)) :95–135, 1979.

[61] T. A. Suslina. The discrete spectrum of a two-dimensional second-order periodic elliptic operator perturbed by a decaying potential. II. Inner gaps. *Algebra i Analiz*, 15(2) :128–189, 2003.

[62] Stefan Teufel. *Adiabatic perturbation theory in quantum dynamics*, volume 1821 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[63] J. Zak. Dynamics of electrons in solids in external fields. ii. *Phys. Rev.*, 177 :1151–1160, Jan 1969.

[64] M. Zworski. *Semiclassical Analysis*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Soc.

Résumé

Cette thèse traite de certaines propriétés spectrales de deux classes spécifiques des opérateurs périodiques perturbés. Nous nous intéressons tout d'abord à un opérateur différentiel elliptique à coefficients périodiques P perturbé par un opérateur différentiel dépendant d'un petit paramètre semi-classique $Q(h), h \searrow 0$. On obtient un développement asymptotique en puissances de h de la trace de $f(P+Q(h))$ et on donne son terme principal. Ici $f \in C_0^\infty(I)$, où I est un intervalle ouvert disjoint du spectre de P. Nous obtenons alors le comportement asymptotique de la fonction du comptage des valeurs propres dans les gaps avec une estimation optimale du reste.
Le second modèle étudié est un opérateur elliptique périodique d'ordre deux H perturbé par un opérateur différentiel dépendant d'une grande constante de couplage $\lambda Q, \lambda \nearrow +\infty$. On obtient un développement asymptotique en puissances de $\lambda^{-\frac{1}{\delta}}$ de la trace de $f(H+\lambda Q)$. Ici $f \in C_0^\infty(I)$, où I est un intervalle disjoint du spectre de H. Nous donnons également la formule de type Weyl avec l'estimation optimale du reste de la fonction de comptage des valeurs propres lorsque la constante de couplage tend vers l'infini.
La dernière partie de cette thèse discute l'étude du spectre discret de l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel très oscillent dépendant d'un petit paramètre semi-classique.

Mots-clés : Opérateurs périodiques, formule de trace asymptotique, limite semi-classique, grandes constantes de couplage, développements asymptotiques, distribution des valeurs propres, densité d'états, champs magnétiques, perturbation très oscillante.

Abstract

This Ph.D thesis deals with some spectral properties of two specific classes of two periodic operators. We are firstly interested in the elliptic periodic differential operator P perturbed by a differential operator depending with a small semi-classical constant $Q(h), h \searrow 0$. We obtain an asymptotic expasion in powers of h of the trace of $f(P+Q(h))$ and we give explicitly the leading term. Here $f \in C_0^\infty(I)$, where I is an intervall disjoint from the spectrum of P. We obtain the asymptotic behavior of the counting function of eigenvalues of $P+Q(h)$ as $h \searrow 0$ with sharp remainder estimate in the spectral gaps.
The second model studied in this thesis is a periodic elliptic operator H perturbed by differential operator depending with large coupling constant $\lambda Q, \lambda \nearrow +\infty$. We obtain an asymptotic expasion in powers of $\lambda^{-\frac{1}{\delta}}$ of the trace of $f(H+\lambda Q)$ and we give explicitly the leading term. Here $f \in C_0^\infty(I)$, where I is an intervall disjoint from the spectrum of H. We also obtain a Weyl formula with optimal remainder estimate of the counting fuction of eigenvalues of $f(H+\lambda Q)$ when the coupling constant tends to infinity.
The last part of this thesis highlights the study the spectrum of a Schrödinger operator perturbed by a fast oscillating decaying potential depending on a small parameter.

Key-words : Periodic operator, asymptotic trace formula, semi-classical limit, large coupling constant, asymptotic expansions, distribution of eigenvalues, density of state, magnetic fields, very oscillating perturbation.

Institut de Mathématiques de Bordeaux, UMR 5251
351, cours de la Libération - F 33 405 TALENCE cedex